ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016 / 2017
Session 1 d'automne
PARCOURS / ÉTAPE : MSMA7103
Code UE : N1MA7102
Épreuve : Modules, espaces quadratiques
Date : 8/12/2016 **Heure :** 9h **Durée :** 3h00
Documents : non autorisés
Épreuve de Mr Brinon

Collège Sciences et technologies

Les documents et les calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.

Dans tout l'éconcé, « représentation » signifie représentation complexe de dimension finie.

Exercice 1

(0) Rappeler la table des caractères du groupe $(\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})^2$.

Notons D_8 le groupe diédral à 8 éléments.

(1) Rappeler la définition de D_8.

(2) Déterminer le centre $\mathsf{Z}(D_8)$ et les classes de conjugaison de D_8.

(3) Expliciter $D_8/\mathsf{Z}(D_8)$.

(4) En déduire les caractères des représentations de dimension 1 de D_8.

(5) En déduire la table des caractères de D_8.

Soit Q_8 le groupe des quaternions. On rappelle que $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ avec les relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

(6) Déterminer le centre $\mathsf{Z}(Q_8)$ et les classes de conjugaison de Q_8.

(7) Expliciter $Q_8/\mathsf{Z}(Q_8)$.

(8) En déduire les caractères des représentations de dimension 1 de Q_8.

(9) En déduire la table des caractères de Q_8.

(10) Les groupes D_8 et Q_8 sont-ils isomorphes ? Qu'en conclure ?

Exercice 2

Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et V un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient q et q' deux formes quadratiques sur V, de formes polaires φ et φ' respectivement. Le but de l'exercice est de montrer que dans certains cas, l'égalité de leurs cônes isotropes implique que q et q' sont proportionnelles. On suppose donc désormais que $C := q^{-1}(\{0\}) = q'^{-1}(\{0\})$. Le cas $C = V$ étant évident, on suppose en outre que $C \neq V$.

(1) Dans cette question, on suppose K algébriquement clos. Soient $x_0 \in V\backslash\{0\}$ non isotrope, et $\alpha = \frac{q'(x_0)}{q(x_0)} \in K^\times$. Soit $x \in V$. En comparant les racines des éléments $q(x + \lambda x_0)$ et $q'(x + \lambda x_0)$ de $K[\lambda]$, montrer que $q'(x) = \alpha q(x)$.

(2) Dans cette question, on suppose $C \neq \varnothing$, et q non dégénérée. On fixe $x_0 \in C\backslash\{0\}$.
   (a) Notons W (resp. W') l'orthogonal de x_0 pour q (resp. q'). En comparant, pour $x \in V$ et $\lambda \in K$, les cas d'annulation de $q(\lambda x + x_0)$ et $q(\lambda x + x_0)$, montrer que $W = W'$ (on distinguera le cas où x est isotrope).
   (b) En déduire qu'il existe $\alpha \in K^\times$ tel que $(\forall x \in V)\, \varphi'(x, x_0) = \alpha \varphi(x, x_0)$.
   (c) Soit $x \in V\backslash W$. Montrer que $q'(x) = \alpha q(x)$ (indication : considérer l'annulation de $q(x + \lambda x_0)$, pour $\lambda \in K$).

(d) Soit $x \in W$. Montrer que si $y \in V \backslash W$, on a $\varphi'(x+y,y) = \alpha\varphi(x+y,y)$ (indication : développer $q'(x+2y)$).

(e) En déduire que $q'(x) = \alpha q(x)$ (indication : développer $q'(x) = q'(x+y-y)$).

(3) Donner un exemple de deux formes quadratiques sur $V = \mathbf{R}^2$ qui sont non proportionnelles, mais ont même cône isotrope.

Exercice 3

Soient K un corps fini de cardinal q impair, V un K-espace vectoriel de dimension d et $\theta\colon V \to K$ une forme quadratique non dégénérée.

(1) Calculer $\#\mathsf{O}(\theta)$ lorsque $d = 1$.

On suppose désormais $d > 1$.

(2) Démontrer que pour tout $\lambda \in K^\times$, il existe $v \in V$ tel que $\theta(v) = \lambda$.

(3) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de θ est $\mathsf{diag}(1,\dots,1,\alpha)$ avec $\alpha \in K^\times$. Combien y a-t-il de classes d'isomorphismes d'espaces quadratiques non dégénérés de dimension d sur K ?

On note $\mathsf{O}(d,\alpha)$ le groupe orthogonal de K^d muni de la forme quadratique $\langle 1,\dots,1,\alpha\rangle$: d'après ce qui précède, on a $\mathsf{O}(\theta) \simeq \mathsf{O}(d,\alpha)$.

Posons $\varepsilon = \alpha^{\frac{q-1}{2}} \in \{\pm 1\}$. On sait que $\varepsilon = 1$ si α est un carré de $K^\times$ et $\varepsilon = -1$ sinon. On pose de même $\delta = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \in \{\pm 1\}$. On va montrer la formule suivante :

$$(*) \qquad \#\mathsf{O}(\theta) = \begin{cases} 2q^n \prod_{i=0}^{n-1} \left(q^{2n} - q^{2i}\right) & \text{si } d = 2n+1 \\ 2(q^n - \delta^n\varepsilon) \prod_{i=1}^{n-1} \left(q^{2n} - q^{2i}\right) & \text{si } d = 2n \end{cases}$$

Pour cela, on va considérer les hypersurfaces suivantes :

$$I_n(a) = \{(x_1,\dots,x_{2n+1}) \in K^{2n+1},\ x_1x_2 + \cdots + x_{2n-1}x_{2n} + ax_{2n+1}^2 = 1\} \subset K^{2n+1}$$
$$P_n(a) = \{(x_1,\dots,x_{2n}) \in K^{2n},\ x_1x_2 + \cdots + x_{2n-3}x_{2n-2} + x_{2n-1}^2 + ax_{2n}^2 = 1\} \subset K^{2n}$$

indexées par $a \in K^\times$.

(4) Montrer que $\#I_n(a) = q^n\big(q^n + a^{\frac{q-1}{2}}\big)$ (indication : on calculera le nombre de solutions en fixant $(x_1,x_3,\dots,x_{2n-1})$, en distinguant le cas $(x_1,x_3,\dots,x_{2n-1}) = (0,\dots,0)$).

Dans la suite, on admettra que $\#P_n(a) = q^{n-1}\big(q^n - (-a)^{\frac{q-1}{2}}\big)$.

(5) Expliquer pourquoi le groupe $\mathsf{O}(d,\alpha)$ agit transitivement sur

$$\begin{cases} I_k((-1)^n\alpha) & \text{si } d = 2n+1 \\ P_k((-1)^{n-1}\alpha) & \text{si } d = 2n \end{cases}$$

(indication : on montrera que $\langle 1,\dots,1,\alpha\rangle$ et la forme quadratique définissant l'hypersurface sont équivalentes).

(6) Démontrer l'égalité $(*)$ dans le cas $d = 2$ (indication : on s'intéressera au stabilisateur d'un élément de $P_1(\alpha)$ sous l'action de $\mathsf{O}(2,\alpha)$).

(7) Montrer l'égalité $(*)$ par récurrence sur d.

Il en résulte qu'en dimension paire, il y a deux classes d'isomorphisme de groupes orthogonaux de formes quadratiques non dégénérées.

(8) Expliquer pourquoi en dimension impaire, les groupes orthogonaux de toutes les formes quadratiques non dégénérées sont isomorphes.