| | | |
|---|---|---|
| université de BORDEAUX | **ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017 / 2018**<br>**Session 1 d'automne**<br>**PARCOURS / ÉTAPE : MSMA7103**<br>**Code UE : N1MA7102**<br>**Épreuve :** Modules, espaces quadratiques<br>**Date :** 18/12/2017 **Heure :** 14h **Durée :** 3h00<br>Documents : non autorisés<br>Épreuve de Mr Brinon | **Collège Sciences et technologies** |

*Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.*
*La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.*

Dans tout l'énoncé, « représentation » signifie représentation complexe de dimension finie.

## Exercice 1

(1) Soit $A = (\mathbf{Z}/18\,\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/12\,\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2017\,\mathbf{Z})$. Donner les facteurs invariants des groupes abéliens $A$ et $A^\times$.

(2) Donner une base adaptée pour le sous-$\mathbf{Z}$-module $M \subset \mathbf{Z}^4$ engendré par $(2,-1,0,0)$, $(-1,2,-1,-1)$, $(0,-1,2,0)$ et $(0,-1,0,2)$. Calculer le quotient $\mathbf{Z}^4/M$.

(3) Soient $M = \mathbf{Z}^n$ et $N$ le sous-groupe de $M$ engendré par une famille libre $x_1, \ldots, x_n$. Écrivons $x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}) \in M$ et posons $d = \det(x_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer l'égalité $[M : N] = |d|$.

Soient $K$ un corps de caractéristique impaire et $(V, q)$ un espace quadratique.

(4) Soit $W \subset V$ un sous-espace de dimension finie tel que $(W, q_{|W})$ soit non dégénéré. Montrer que $V = W \oplus W^\perp$.

(5) Supposons $V$ non dégénéré et soit $v \in V \backslash \{0\}$ un vecteur isotrope. Montrer que $V$ contient un plan hyperbolique $H$, que $V = H \oplus H^\perp$, puis que l'application $q \colon V \to K$ est surjective.

## Exercice 2

On rappelle que le groupe $\mathfrak{A}_5$ est simple.

(1) Montrer que les 5-cycles de $\mathfrak{A}_5$ forment deux classes de conjugaison (indication : on montrera que le commutant de $(1,2,3,4,5)$ dans $\mathfrak{S}_5$ est inclus dans $\mathfrak{A}_5$).

(2) En déduire les classes de conjugaison du groupe $\mathfrak{A}_5$ (on précisera leurs cardinaux respectifs).

(3) En déduire que $\mathfrak{A}_5$ a cinq classes d'isomorphisme de représentations irréductibles. Combien y en a-t-il de dimension 1 ?

(4) Décomposer la représentation de permutation associée à l'action naturelle de $\mathfrak{A}_5$ sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$. On note $W$ la représentation non triviale qui apparaît dans cette décomposition.

(5) En déduire que $\mathfrak{A}_5$ a une représentation irréductible $X$ de dimension 5 et deux représentations irréductibles $Y$ et $Z$ de dimension 3 non isomorphes.

Posons $\tau = (1,2)$, et si $\chi$ est une fonction centrale sur $\mathfrak{A}_5$, posons $\widetilde{\chi} \colon g \mapsto \chi(\tau^{-1} g \tau)$.

(6) Montrer que si $\chi$ est un caractère irréductible, il en est de même de $\widetilde{\chi}$.

(7) Montrer que $\widetilde{\chi}_X = \chi_X$ et que $\widetilde{\chi}_Y = \chi_Z$ (indictation : montrer soigneusement que $\widetilde{\chi}_Y \in \{\chi_Y, \chi_Z\}$, puis que $\widetilde{\chi}_Y \neq \chi_Y$ en raisonnant par l'absurde et en utilisant le fait que les caractères irréductibles forment une base de l'espace des fonctions centrales sur $\mathfrak{A}_5$).

(8) Soit $P$ l'ensemble des parties à deux éléments dans $\{1, \ldots, 5\}$, muni de l'action naturelle de $\mathfrak{A}_5$. Calculer le caractère de la représentation de permutation associée et en déduire que cette dernière est isomorphe à $\mathbf{1} \oplus W \oplus W'$, où $\mathbf{1}$ désigne la représention triviale et $W'$ une représentation dont on calculera le caractère. En déduire $\chi_X$.

(9) Écrire la table des caractères de $\mathfrak{A}_5$ en indiquant les valeurs numériques connues, et les autres sous forme d'inconnues.

(10) En utilisant les relations d'orthogonalité, trouver ces valeurs inconnues, et dresser la table des caractères du groupe $\mathfrak{A}_5$ (on expliquera pourquoi les caractères $\chi_Y$ et $\chi_Z$ sont à valeurs réelles).

## Exercice 3

Soient $K$ un corps de caractéristique impaire et $(V, q)$ un espace quadratique non dégénéré de dimension 2 sur $K$.

(1) Montrer que $(V, q)$ est soit un plan hyperbolique, soit anisotrope.

(2) On suppose que $(V, q)$ est un plan hyperbolique.
  - (a) Décrire le groupe $\mathsf{O}(q)$ en termes matriciels.
  - (b) En déduire la structure des groupes $\mathsf{SO}(q)$ et $\mathsf{O}(q)$.
  - (c) Calculer le centre du groupe $\mathsf{O}(q)$ et en déduire dans quel cas $\mathsf{O}(q)$ est abélien.
  - (d) Expliciter les groupes $\mathsf{SO}(q)$ et $\mathsf{O}(q)$ lorsque $K$ est un corps fini.

(3) On suppose désormais que $(V, q)$ est anisotrope.
  - (a) Si $f \in \mathsf{SO}(q)$ est tel que $\mathsf{Ker}(f - \mathsf{Id}_V) \neq \{0\}$, montrer que $f = \mathsf{Id}_V$.
  - (b) En déduire que les éléments de $\mathsf{O}(q) \setminus \mathsf{SO}(q)$ sont des réflexions, et que tout élément de $\mathsf{SO}(q)$ peut s'écrire comme le produit de deux réflexion, dont l'une peut être choisie arbitrairement.
  - (c) Montrer que le groupe $\mathsf{SO}(q)$ est abélien (indication : si $f_1, f_2 \in \mathsf{SO}(q)$, montrer qu'ils commutent en les écrivant comme produits de deux réflexions judicieusement choisies).
  - (d) Montrer que $\mathsf{Z}(\mathsf{O}(q)) = \{\pm \mathsf{Id}_V\}$.

(4) Supposons $K$ fini : il existe une base $\mathfrak{B}$ de $V$ dans laquelle la matrice de $q$ est $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ où $\alpha \in K^\times$ n'est pas un carré. Soient $L$ l'extension quadratique de $K$ engendrée par $\beta$ tel que $\beta^2 = -\alpha$ et $\mathsf{N}(x) = x\sigma(x)$ la norme de $x$ (où $\sigma$ l'élément non trivial du groupe $\mathsf{Gal}(L/K)$).
  - (a) Décrire matriciellement le groupe $\mathsf{O}(q)$.
  - (b) En déduire que $\mathsf{SO}(q)$ est isomorphe au sous-groupe $\{x \in L^\times \mid \mathsf{N}(x) = 1\}$ de $L^\times$, dont on donnera la structure.
  - (c) En déduire la structure du groupe $\mathsf{O}(q)$.