université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017 / 2018** **SESSION 2 DE PRINTEMPS** **PARCOURS / ÉTAPE : MSMA7103** **Code UE : N1MA7102** **Épreuve :** Modules, espaces quadratiques **Date :** 25/06/2018 **Heure :** 8h30 **Durée :** 3h00 Documents : non autorisés Épreuve de Mr Brinon	**Collège Sciences et technologies**

Les documents et les calculatrices sont autorisés.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.

Dans tout l'énoncé, « représentation » signifie représentation complexe de dimension finie.

Exercice 1

(1) Soit $A = (\mathbf{Z}/25\,\mathbf{Z})\times(\mathbf{Z}/6\,\mathbf{Z})\times(\mathbf{Z}/2018\,\mathbf{Z})$. Donner les facteurs invariants des groupes abéliens A et $A^\times$.

(2) Donner une base adaptée pour le sous-$\mathbf{Z}$-module $M \subset \mathbf{Z}^4$ engendré par $(2,-1,0,0)$, $(-1,2,-1,-1)$, $(0,-1,2,0)$ et $(0,-1,0,2)$. Calculer le quotient $\mathbf{Z}^4/M$.

(3) Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et (E,q) un espace quadratique non dégénéré. Montrer que si q a un vecteur isotrope non nul, alors l'application $q\colon E \to K$ est surjective.

Exercice 2

Soit A un anneau principal.

(1) Soient $x, y \in A\backslash\{0\}$. Posons $d = \mathsf{pgcd}(x,y)$ et écrivons $x = dx'$ et $y = dy'$. Montrer que si $f \in \mathsf{Hom}_A(A/xA, A/yA)$, alors $f(1) \in y'A/yA$.

(2) En déduire que $\mathsf{Hom}_A(A/xA, A/yA) \simeq A/dA$.

Soit M, M_1 et M_2 des A-modules.

(3) Montrer que $\mathsf{Hom}_A(M, M_1 \times M_2) \simeq \mathsf{Hom}_A(M, M_1) \times \mathsf{Hom}_A(M, M_2)$.

(4) Montrer de même que $\mathsf{Hom}_A(M_1 \times M_2, M) \simeq \mathsf{Hom}_A(M_1, M) \times \mathsf{Hom}_A(M_2, M)$.

On suppose désormais M de type fini et de torsion. Notons $x_1 \mid \cdots \mid x_n$ ses facteurs invariants.

(5) En utilisant tout ce qui précède, montrer que $\mathsf{End}_A(M) \simeq \bigoplus\limits_{i=1}^{n} (A/x_iA)^{2(n-i)+1}$.

Exercice 3

Soient K un corps, E un K-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E et φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Si $x \in F$, on note $\ell_x\colon G \to K$ l'application définie par $\ell_x(y) = \varphi(x,y)$ pour tout $y \in G$.

(1) Montrer que l'application $x \mapsto \ell_x$ induit une application $\ell\colon F \to (G/(G\cap F^\perp))^\vee$ (où, si V est un K-espace vectoriel, $V^\vee := \mathsf{Hom}_{K\text{-lin}}(V,K)$ désigne le dual de V).

(2) Quel est le noyau de ℓ ? En déduire que

$$\dim_K(F) - \dim_K(F\cap G^\perp) \leqslant \dim_K(G) - \dim_K(G\cap F^\perp).$$

(3) Montrer que $\dim_K(F) - \dim_K(F \cap G^{\perp}) = \dim_K(G) - \dim_K(G \cap F^{\perp})$.

Exercice 4

Soient G un groupe fini, (V, ρ) une représentation de G et χ_V son caractère.
(1) Supposons V irréductible. Si $C \subset G$ est une classe de conjugaison, posons $\varphi_C = \sum_{g \in C} g$.
 (a) Montrer que φ_C induit une homothétie sur V : on note λ_C son rapport.
 (b) Montrer que $\lambda_C \dim_{\mathbf{C}}(V) = \chi_V(C) \# C$.
 (c) En utilisant le fait que $\varphi_C \in \mathsf{Z}(\mathbf{Z}[G])$ et que $\mathbf{Z}[G]$ est une $\mathbf{Z}$-algèbre finie, montrer que λ_C est un entier algébrique.
 (d) En déduire que $\frac{\# G}{\dim_{\mathbf{C}}(V)} = \sum_C \lambda_C \overline{\chi_V(C)}$ est un entier algébrique, puis que $\dim_{\mathbf{C}}(V)$ divise $\# G$.

On suppose désormais G simple et non abélien.
(2) Montrer que toute représentation de dimension 1 est triviale.
(3) Supposons V de dimension 2 et non triviale.
 (a) En utilisant la question (2), montrer que V est irréductible.
 (b) En utilisant la question (1), montrer que G contient un élément x d'ordre 2.
 (c) Montrer que $\det(\rho(x)) = 1$, puis que $\rho(x) = -\mathsf{Id}_V$.
 (d) En déduire que $x \in \mathsf{Z}(G)$, puis que V est nécessairement triviale.

Problème

Soient q une puissance d'un nombre premier impair, f une forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbf{F}_q^n$ (avec q impair) et $\mathsf{disc}(f) = d\,\mathbf{F}_q^{\times 2}$. On pose

$$N_n(d) = \# f^{-1}(\{0\}), \quad R_n(d) = f^{-1}(\{1\}) \quad \text{et} \quad A_n(d) = \# \mathsf{SO}(f).$$

Si $a \in \mathbf{F}_q^{\times}$, on pose $\chi(a) = 1$ si a est un carré de $\mathbf{F}_q^{\times}$, et $\chi(a) = -1$ sinon.
(0) Expliquer pourquoi ces notations ont un sens (*i.e.* pourquoi les quantités $N_n(d)$, $R_n(d)$ et $A_n(d)$ ne dépendent que de n et de d).
(1) Supposons $n \geqslant 3$.
 (a) Montrer qu'il existe une base dans laquelle on a $f = 2x_1x_2 + g(x_3, \ldots, x_n)$. Préciser le discriminant de g.
 (b) En déduire que $N_n(d) = q^{n-2}(q-1) + qN_{n-2}(-d)$.
(2) Montrer que $N_{2m+1}(d) = q^{2m}$ et $N_{2m}(d) = q^{2m-1} + (q-1)q^{m-1}\chi((-1)^m d)$.
(3) Montrer que $R_{2m}(d) = q^{2m-1} - q^{m-1}\chi((-1)^m d)$ et $R_{2m+1}(d) = q^{2m} + q^m\chi((-1)^m d)$ (indication : montrer que $N_{n+1}(-d) = N_n(d) + (q-1)R_n(d)$ en considérant la forme quadratique $-x_0^2 + f(x_1, \ldots, x_n)$).
(4) Posons $\mathscr{S}_n(d) := \{\mathbf{x} \in \mathbf{F}_q^n \mid f(\mathbf{x}) = 1\}$ (la « sphère » unité).
 (a) Montrer que $\mathsf{SO}(f)$ agit transitivement sur $\mathscr{S}_n(d)$.
 (b) En déduire que $A_n(d) = R_n(d)A_{n-1}(d)$.
 (c) En déduire que

$$\begin{cases} A_{2m+1}(d) = q^{m^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2m}-1) \\ A_{2m}(d) = q^{m(m-1)}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2m-2}-1)(q^m - \chi((-1)^m d)) \end{cases}$$