Equation des ondes et valeurs propres du laplacien

Nicolas Popoff

October 8, 2019

Qu'est-ce que c'est qu'une EDP?

Une équation aux dérivees partielles a pour inconnue une fonction de plusieurs variables.
Elle relie la fonction et ses dérivées (partielles).
C'est un domaine très riche :

- Chaque domaine de la physique amène son EDP.
- Il y a presque autant d'outils que d'EDP!!
- Pour étudier une EDP, il faut des connaissances en Analyse, Géométrie, algèbre linéaire, calcul scientifique...

Axes d'études :

- Qualitatif (existence et unicité des solutions, stabilité...)
- Quantitatif (Solutions explicites, analyse asymptotique...)
- Numérique.

Et après, il faut revenir au modèle et aller vers les applications!

Des dérivées partielles

Si on a une fonction qui dépend à la fois du temps et de l'espace, c'est une fonction de deux variables

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$(x, t) \mapsto u(x, t).$$

On peut définir ses dérivées partielles :

1. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $t \mapsto u(x_0, t)$ est une fonction sur $\mathbb{R}$.
2. On peut la dériver! La dérivée au point t_0 est notée $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0)$.
3. On a défini une nouvelle fonction de deux variables $\frac{\partial u}{\partial t}$.

De même, on peut définir $\frac{\partial u}{\partial x}$ et les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$.

Un calcul qui va servir

Exo : Soit $u(x,t) = \cos(\omega t) f(x)$. Alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos(\omega t) f''(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 \cos(\omega t) f(x) = -u(x,t).$$

Ce n'est pas toujours aussi simple!

L'équation des ondes

Propagation d'une perturbation u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

- Variable d'espace (1d) : $x \in \mathbb{R}$. Variable de temps : $t \geq 0$. Vitesse caractéristique : $c > 0$.
- On la complète par une perturbation initiale $u(x,0) = u_0(x)$ avec u_0 une fonction donnée.
- Il faut préciser dans quel espace vit la solution.

EDP très simplifiée :

- Elle est linéaire.
- Pas d'amortissement.
- On ne vit pas en 1d.

Un modèle pour les vagues

Décrit la hauteur u d'une petite vague unidirectionnelle dans une mer de profondeur h_0 faible avec $c = \sqrt{gh_0}$.
Si $x \in \mathbb{R}$, les solutions sont de la forme

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct), \quad f \text{ et } g \text{ deux fonctions}$$

Des solutions très importantes :

$$e^{i(kx \pm wt)}, \quad \omega \text{ la pulsation et } k \text{ la fréquence spatiale avec } c = \frac{\omega}{k}.$$

Elles sont à la base de l'analyse de Fourier et permet de décomposer des ondes pour des modèles plus compliqués (profondeur variable, dissipation...).

L'équation des ondes en domaine borné

On considère une cavité 1d fermée de taille L, peu profonde.
Phénomène de seiche : oscillations de la surface.
On observe des solutions stationnaires de fréquences particulière.
Soit $u(t,x)$ la hauteur de l'eau au temps t et au point x :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{(perturbation initiale } u_0\text{)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \quad \text{(parois réflechissantes)} \end{cases}$$

Un modèle similaire : la corde vibrante

- $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ avec T la tension et μ la masse linéique.
- La corde est attachée au bord : $u(0,t) = u(L,t) = 0$.
- Applications en accoustique.

Approche en domaine borné

On ne peut plus poser $\xi_\pm = x \pm ct$ car $x \in [0, L]$.
Pour faire simple, posons $c = 1$.
On cherche quand même une solution particulière en variables séparées :

$$u(x,t) = f(x)\cos(\omega t).$$

On calcule... u est solution de l'EDP si et seulement si

$$-f''(x) = \omega^2 f(x).$$

Un problème aux valeurs propres

On ajoute les conditions au bord :
on cherche donc à déterminer ω ET $f \neq 0$ tels que

$$\begin{cases} -f''(x) = \omega^2 f(x) \quad \text{sur} \quad [0, L], \\ f'(0) = f'(L) = 0. \end{cases}$$

Solutions : $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$.
Conditions au bord :
$f'(0) = f'(L) = 0 \Longrightarrow B = 0$ et $\omega\sin(\omega L) = 0$.
On trouve que (ω, f) est de la forme

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad f_n(x) = \cos(\omega_n x).$$

On dit qu'on a résolu un problème aux valeurs propres.
Un musicen vous dira qu'on a trouvé les harmoniques...

Détour : le spectre d'une matrice

Pour une matrice carrée $A \in M_N(\mathbb{R})$, on peut chercher ses valeurs propres et ses vecteurs propres :
Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ ET $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que

$$AX = \lambda X$$

Les trouver permet de décortiquer A (diagonalisation...).
Il y a au plus N solutions pour λ : c'est le spectre de la matrice A.
Ici, si on pose $E = \{f \in C^\infty([0, L]), f'(0) = f'(L) = 0\}$ et

$$\mathcal{A} : f \mapsto -f'',$$

Alors E est un e.v. et $\mathcal{A}$ est un endomorphisme de E.
On a trouvé une infinité de valeurs propres pour $\mathcal{A}$...c'est normal : E est de dimension infinie!
Ce sont les bases de la théorie spectrale.

Résolution du problème par séries de Fourier

Solution explicite :

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} A_n \cos(\frac{n\pi t}{L}) \cos(\frac{n\pi x}{L}).$$

- Les coefficient A_n sont les coefficients de Fourier de la position initiale u_0.
- C'est la superposition d'harmonique.

Pour aller au bout

- Précisez la convergence de la série, et la régularité de la fonction trouvée.
- Y a-t-il d'autres solutions? Il faut montrer :
  1. Avec une donnée u_0 convenable, toutes les solutions sont L^2.
  2. La méthode montre que cette solution est la seule.

Nous ne vivons pas en 1d...

Les ω_n forme le spectre de cette cavité. Il ne dépend que de L...
L'équation des ondes en dimension n est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \Delta u(x,t), \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Alors pour l'océan, il faut prendre $x \in \mathbb{R}^2$. Mais nous ne vivons pas en 2d non plus...

Conditions au bord :

- Membrane vibrante : $u = 0$ (Dirichlet).
- Bassin fermé : $\nabla u \cdot \vec{n} = 0$ (Neumann).

les valeurs propres du laplacien

Introduisons l'opérateur laplacien

$$\mathcal{A} : u \mapsto -\Delta u := -\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}.$$

Le spectre de $\mathcal{A}$ est une suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres tels qu'il existe $u_n \neq 0$ vérifiant les conditions au bord et

$$\mathcal{A}u_n = \omega_n u_n.$$

Le spectre dépend de la forme de Ω (pas explicite du tout...)

Question (M. Kac, 1966) :
Peut-on entendre la forme d'un tambour?
Autrement dit : $\Omega \mapsto (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle injective?

Cocotte et flêche

Réponse négative par Gordon and coauteurs (1991) :

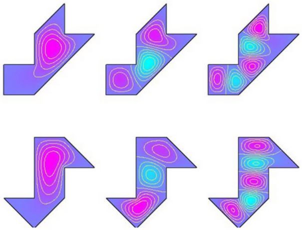


Figure: Cocotte et flêche : deux tambours isospectraux

Construction depuis des quadrilatères symétrisés sur le plan hyperbolique...Beaucoup de géometrie et d'algèbre caché derrière!
Pour des tambours plus réguliers, la question reste ouverte!

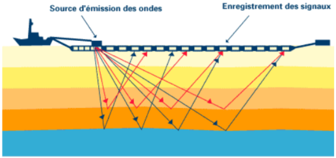
Les problèmes inverses

C'est un problème inverse :

- En entendant le son, reconstruire la forme du tambour?
- Autres problèmes inverses : à partir d'observation de la solution d'une EDP en surface, peut-on connaître les coefficients de l'EDP à l'intérieur d'un objet?

Nombreuses applications :

- Tomographie (détéction de tumeur).
- Géologie (nappe d'eaux, gisements de pétrole).
- Sismologie (recherche de l'épicentre).
- Cosmologie.



Optimisation de forme

Une question :

- Lord Rayleigh dans *the theory of sound* (1877):

  Fixez l'aire du tambour Ω, quelle forme minimise ω_1?

  En d'autres termes : quelle forme de tambour a la fréquence fondamentale la plus basse?

- Réponse de Faber and Krahn (1923):
  Ce sont les tambours circulaires .

- Il existe de nombreux autres problèmes d'optimisation de forme non résolus, par exemple : avec une condition au bord mixte

$$\nabla u \cdot \vec{n} = \alpha u, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé.}$$

Comparaison des deux modèles

Pour résoudre $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, il est pertinent de résoudre formellement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \lambda f.$$

- Si $x \in \mathbb{R}$, alors $u(x) = e^{ikx}$ et $\lambda = -k^2$ sont toujours solutions (on a écarté $u(x) = e^{kx}$). La fréquence k peut varier continuement dans $\mathbb{R}$.
- Si x est dans une domaine borné avec condition au bord, λ ne peut prendre que des valeurs discrètes (une suite).

Dans les deux cas, les autres solutions se déduisent par superposition (besoin de théorèmes...).

D'autres EDP

On a vu deux équations des ondes linéaire.
Il en existe bien d'autres :

- Equations des vagues plus complexes (Tsunami, Houle).
- Equations de Maxwell (Electromagnetisme).

Elles appartiennent à la grande famille des EDP hyperboliques.

Les autres familles sont (en gros)

- EDP elliptique (Equation de Laplace).
- EDP paraboliques (Equation de la chaleur, diffusion).