Un aquarium dans mon ordinateur

Lisl Weynans

October 8, 2019

Le calcul scientifique

C'est quoi? A quoi ça sert?

Calcul scientifique

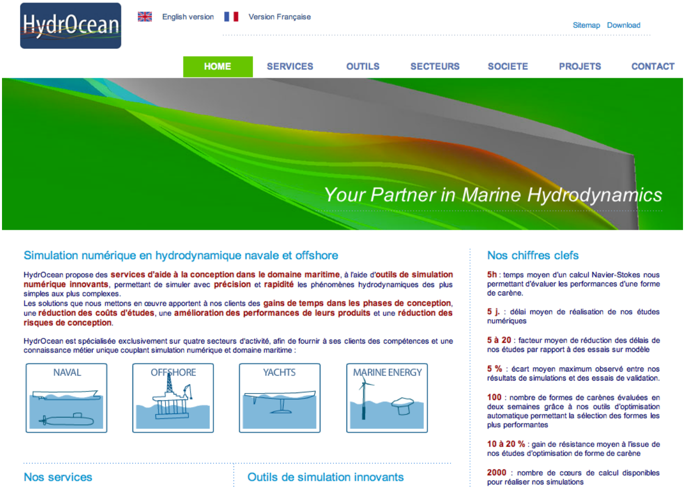
- C'est quoi?

  Branche des mathématiques où on développe, étudie, programme sur ordinateur, des méthodes de résolution **approchée** de problèmes mathématiques modélisant des phénomènes physiques, biologiques, etc

- A quoi ça sert?

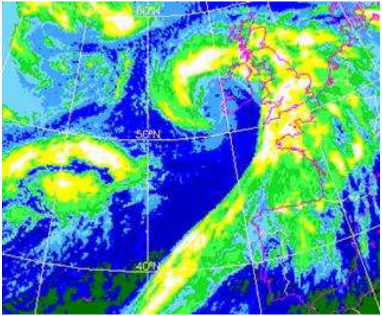
  Faire des prédictions, remplacer des expériences coûteuses, difficiles ou impossibles à réaliser

Calcul scientifique: A quoi ça sert?



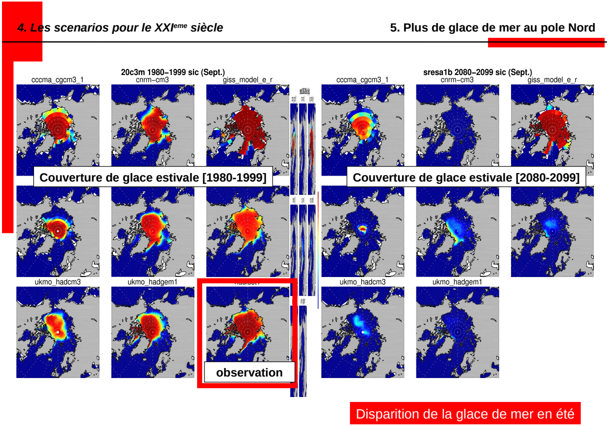
Exemple: Hydrocéan, société de simulations pour la construction navale

Météorologie



Provenance des images: site web de Météo France

Réchauffement climatique



Provenance de l'image: D. Swingedouw (EPOC)

La démarche d'étude

1. Modélisation:
   Elaborer un modèle mathématique qui représente le problème considéré
2. Approximation:
   Construire une méthode numérique pour calculer une solution approchée
3. Implantation algorithmique:
   Programmer efficacement et sans bugs la méthode numérique

La démarche d'étude

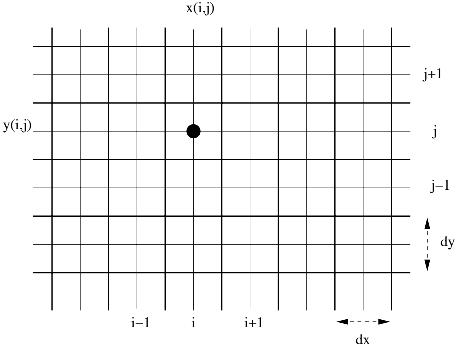
En vrai, pour que ça serve vraiment:

1. Echanges avec physiciens, biologistes, médecins, etc
2. Modélisation
3. Approximation
4. Implantation algorithmique
5. Validation du modèle mathématique en comparant les résultats à des expériences

Discrétisation pour la méthode numérique

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= 0 \text{ sur } [0,1] \\
u(0,x) &= u_0(x) \text{ sur } [0,1] \\
u(t,0) &= u(t,1)
\end{aligned}$$

On cherche une solution approchée sous forme discrète: $u^n_{i,j}$ sur les points $x_i = i\ dx, y_j = j\ dy$ d'une grille, aux instants successifs $t^n = n\ dt$



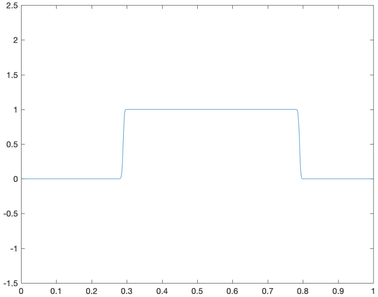
Discrétisation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= 0 \text{ sur } [0,1] \\
u(0,x) &= u_0(x) \text{ sur } [0,1] \\
u(t,0) &= u(t,1)
\end{aligned}$$

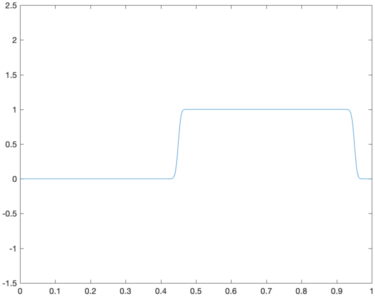
- $$\underbrace{\frac{u(t^{n+1},x_j) - u(t^n,x_j)}{dt}}_{\approx \frac{\partial u}{\partial t}} + \underbrace{\frac{u(t^n,x_{j+1}) - u(t^n,x_{j-1})}{2\,dx}}_{\approx \frac{\partial u}{\partial x}} \approx 0$$
- $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\,dx} = 0$$
- Formule pour calculer u en chaque point, à chaque instant:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{dt}{2\,dx}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

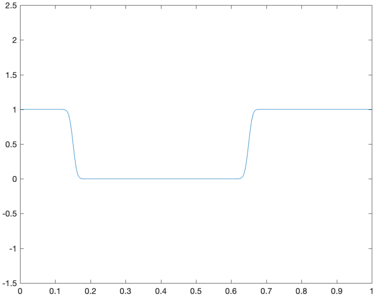
Transport 1D: précision



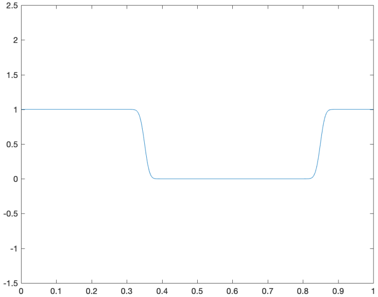
Transport 1D: précision



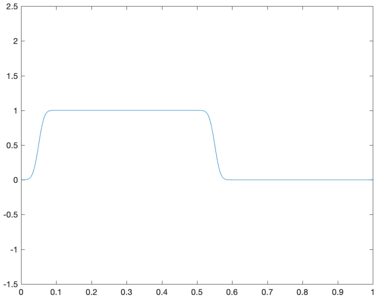
Transport 1D: précision



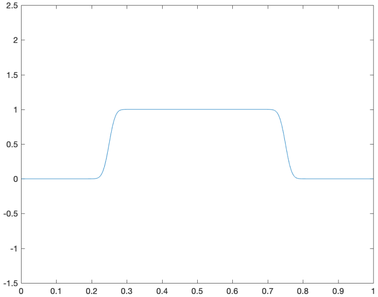
Transport 1D: précision



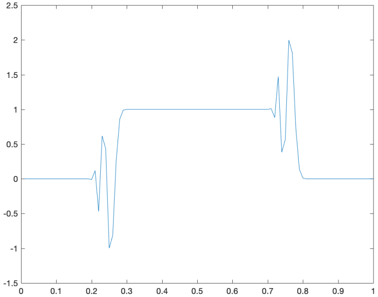
Transport 1D: précision



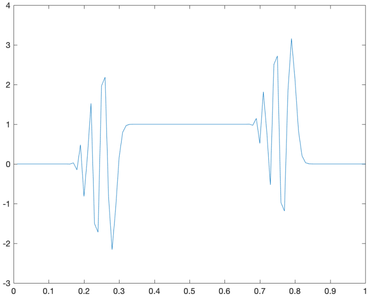
Transport 1D: précision



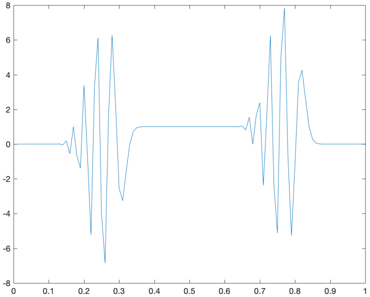
Transport 1D: stabilité



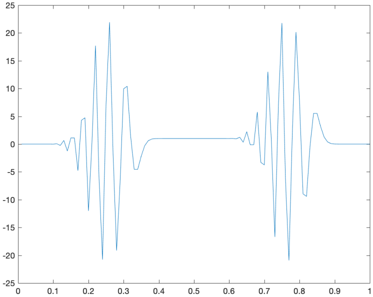
Transport 1D: stabilité



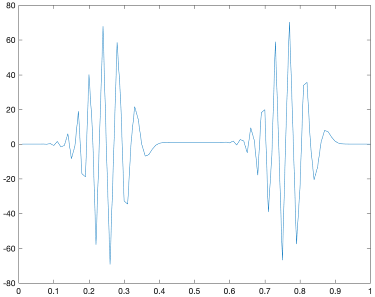
Transport 1D: stabilité



Transport 1D: stabilité



Transport 1D: stabilité

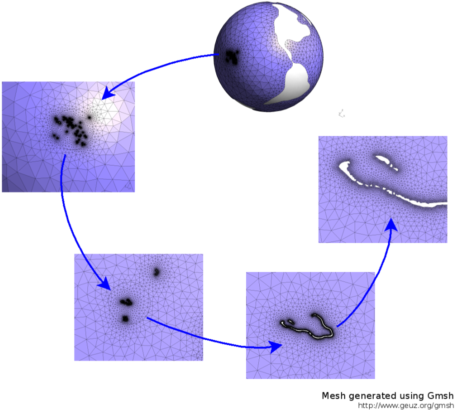


Discrétisation

Etude des propriétés de ces solutions approchées:

- Stabilité (pas d'oscillations parasites)
- Précision: vitesse de convergence vers la vraie solution quand le maillage devient très fin
- Conservation des propriétés de la vraie solution: symétrie, conservation de l'énergie...
- ...

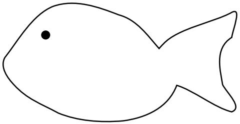
Discrétisation: maillages



Provenance des images: Jean-François Remacle, UCL

Exemple: Nage de poissons

Exemple: Nage de poissons



Exemple: Nage de poissons

Modèle de Navier-Stokes incompressible (vitesse/pression)

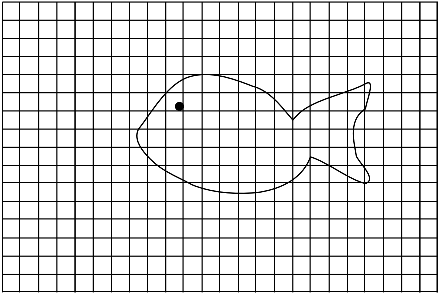
$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u}_{\text{fluide}} + \underbrace{\lambda \sum_{1=1}^{N_s} \chi_i (u_i - u)}_{\text{solides}} \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

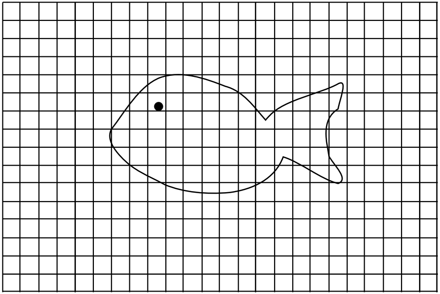
$$u = u_f \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

$\hookrightarrow$ Mêmes equations pour fluide et solides ($\chi_i = 1$ solide, $\chi_i = 0$ fluide)

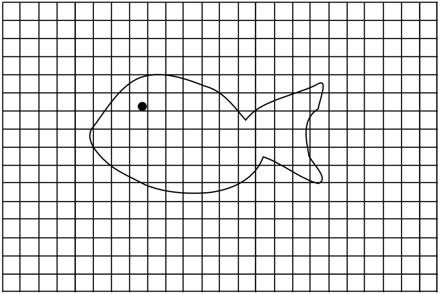
Exemple: Nage de poissons



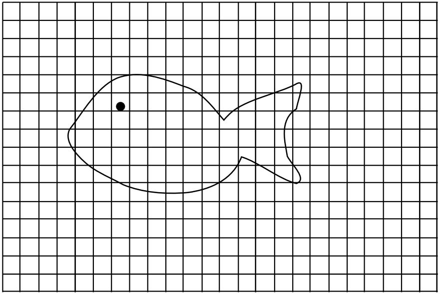
Exemple: Nage de poissons



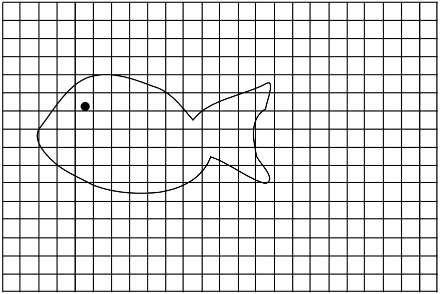
Exemple: Nage de poissons



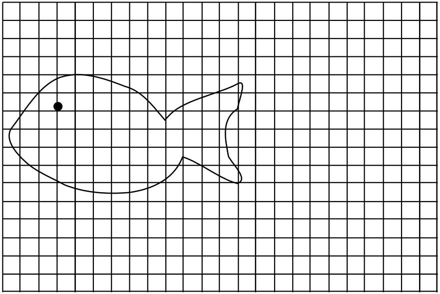
Exemple: Nage de poissons



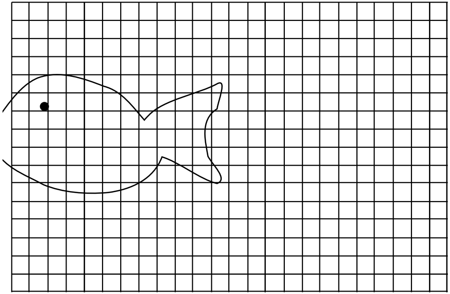
Exemple: Nage de poissons



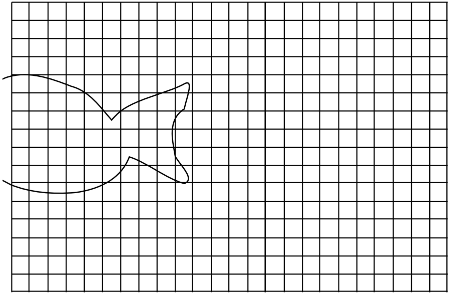
Exemple: Nage de poissons



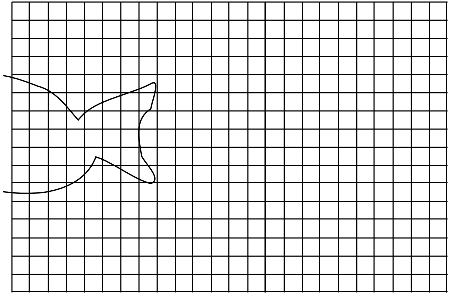
Exemple: Nage de poissons



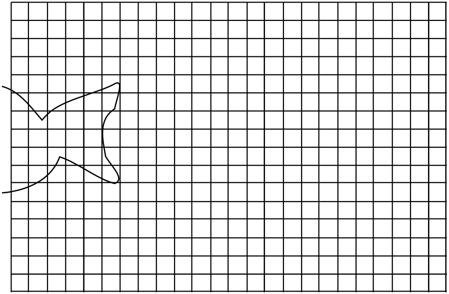
Exemple: Nage de poissons



Exemple: Nage de poissons



Exemple: Nage de poissons



Exemple: Nage de poissons

Etude de l'efficacité de la nage

Exemple: Nage de poissons

Il nous faut une forme de poisson réaliste!

Exemple: Nage de poissons

Modèle de poisson plus réaliste

Exemple: Nage de poissons

Course-poursuite

Exemple: Nage de poissons

Une méduse

Ca marche aussi avec des éoliennes

Des questions?