Sur la non-densité des points entiers

Pascal Autissier

16 juillet 2010

Abstract : We give non-density results for integral points on affine varieties, in the spirit of Lang-Vojta conjecture. In particular, let X be a projective variety of dimension $d \geq 2$ over a number field K (resp. over $\mathbb{C}$). Let H be the sum of $2d$ properly intersecting ample divisors on X. We show that any set of quasi-integral points (resp. any integral curve) on $X - H$ is not Zariski dense.

Résumé : On donne des résultats de non-densité pour les points entiers sur des variétés affines, dans l'esprit de la conjecture de Lang-Vojta. En particulier, soit X une variété projective de dimension $d \geq 2$ sur un corps de nombres K (resp. sur $\mathbb{C}$). Soit H la somme de $2d$ diviseurs amples sur X qui se coupent proprement. On montre que tout ensemble de points quasi-entiers (resp. toute courbe entière) sur $X - H$ est non Zariski-dense.

2010 Mathematics Subject Classification : 14G25, 11J97, 11G35.

1 Introduction

On s'intéresse ici aux solutions à coordonnées (quasi-)entières de systèmes d'équations polynomiales à coefficients dans un corps de nombres K : on prouve qu'une variété projective sur K privée de suffisamment d'hypersurfaces n'a pas beaucoup de points (quasi-)entiers. On a également les résultats analogues en géométrie hyperbolique : une telle variété (sur $\mathbb{C}$) n'a pas de courbe entière non dégénérée.

Plus précisément, soit S un ensemble fini de places de K. On note $O_{K;S}$ l'anneau des S-entiers de K. Cet article s'inscrit dans le cadre d'un problème important de la géométrie arithmétique (*cf* conjecture 4.2 de [8] p. 223) :

Conjecture 1.1 (Lang, Vojta) : Soit X une variété projective lisse sur K de diviseur canonique $\mathcal{K}_X$. Soit D un diviseur effectif sur X, à croisements normaux. Posons $Y = X - D$. On suppose $\mathcal{K}_X + D$ big (par exemple ample) sur X. Alors tout ensemble $\mathcal{E} \subset Y(K)$ S-entier sur Y est non Zariski-dense dans Y.

L'hypothèse sur $\mathcal{K}_X + D$ est une condition de positivité de ce diviseur. Notons que cette conjecture est encore largement ouverte : le cas où $X = \mathbb{P}^2_K$ n'est par exemple pas connu. Levin (*cf* conjecture 5.3A de [10]) en a proposé des cas particuliers intéressants, lorsque D a suffisamment de composantes irréductibles :

Conjecture 1.2 (Levin) : Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. Soient $D_1; \cdots; D_r$ des diviseurs effectifs big sur X qui se coupent proprement. Posons $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_r$. On suppose $r \geq d+2$. Alors aucun ensemble S-entier sur Y n'est Zariski-dense dans Y.

Pour une explication du lien entre 1.1 et 1.2, on pourra consulter le paragraphe 14.2 de [10]. Un théorème classique de Siegel montre cette conjecture lorsque X est une courbe. Le cas des surfaces lisses est obtenu par Levin (*cf* théorème 6.2A.c de [10]).

Par ailleurs, c'est une conséquence directe du théorème du sous-espace (Schmidt [13], Schlickewei [12]) lorsque $X = \mathbb{P}^d_K$ et les D_i sont des hyperplans en position générale. Plus généralement, cet énoncé est connu de Vojta (*cf* corollaire 0.3 de [17]) pour X lisse et $r \geq d+\rho+1$, où ρ désigne le nombre de Picard de $X_{\overline{K}}$.

Dans l'article récent [5], Corvaja, Levin et Zannier démontrent la conjecture 1.2 avec $d^2 - d + 1$ diviseurs D_i amples sur X lisse ($d \geq 3$). On se propose ici d'améliorer ce résultat en considérant un nombre de diviseurs linéaire en d (au lieu de quadratique) :

Théorème 1.3 : *Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 2$. Soient $D_1; \cdots; D_{2d}$ des diviseurs effectifs amples sur X qui se coupent proprement. Posons $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_{2d}$. Alors tout ensemble $\mathcal{E} \subset Y(K)$ S-entier sur Y est non Zariski-dense dans Y.*

On l'obtient comme corollaire d'un critère (théorème 2.1) qui donne des conditions géométriques de non-Zariski-densité des points S-entiers.

La démonstration s'inspire de la méthode introduite par Corvaja-Zannier dans le cas des courbes [3] et des surfaces [4]. Cette méthode, dont l'ingrédient arithmétique principal est le théorème du sous-espace, a ensuite été étendue en dimension supérieure par Levin [10], l'auteur [1] et Corvaja-Levin-Zannier [5].

L'idée nouvelle ici est de considérer un faisceau cohérent codant les ordres d'annulation optimaux en les D_i et de prouver un théorème de convexité (théorème 3.5) sur les sections globales de ce faisceau.

À titre d'application du critère 2.1, on montre en outre l'énoncé suivant :

Théorème 1.4 : *Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 2$. Soient $D_1; \cdots; D_{d+2}$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement. Posons $L = \sum_{i=1}^{d+2} D_i$ et $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_{d+2}$. On suppose que $L - (d+1)D_i$ est ample pour tout $i \in \{1; \cdots; d+2\}$. Alors aucun ensemble S-entier sur Y n'est Zariski-dense dans Y.*

L'hypothèse sur les $L-(d+1)D_i$ est vérifiée lorsque les D_i vivent dans un cône "suffisamment étroit" du groupe de Néron-Severi de X.

Par ailleurs, Vojta [15] a développé un “dictionnaire” entre la géométrie diophantienne et la théorie de Nevanlinna : l'étude des points S-entiers sur les variétés sur K est mise en analogie avec l'étude des courbes entières sur les variétés complexes. À titre d'exemple, le théorème de Siegel sur les courbes est l'analogue du théorème de Picard.

Pour l'étayer, on obtient aussi le critère (théorème 2.2) qui, dans ce dictionnaire, correspond au théorème 2.1.

La section 2 décrit les critères de quasi-hyperbolicité, qui sont démontrés à la section 4. La section 3 donne le théorème de convexité 3.5 (ainsi qu'un lemme d'algèbre locale prouvé à la section 6). On en déduit les théorèmes 1.3 et 1.4 à la section 5.

Je remercie Yuri Bilu pour m'avoir fourni la référence [5]. Je remercie également les rapporteurs pour leurs suggestions pertinentes.

2 Définitions et énoncés

Soit K un corps. Commençons par quelques définitions de géométrie.

Conventions : On appelle variété sur K tout schéma quasi-projectif et géométriquement intègre sur K. Le mot “diviseur” sous-entend “diviseur de Cartier”.

Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. Lorsque L est un diviseur sur X tel que $h^0(X; L) \geq 1$, on désigne par $\mathbf{B}_L$ le lieu de base de $\Gamma(X; L)$ et par $\Phi_L : X - \mathbf{B}_L \to \mathbb{P}(\Gamma(X; L))$ le morphisme défini par $\Gamma(X; L)$. Pour tout diviseur effectif D sur X, on note 1_D la section globale de $\mathcal{O}_X(D)$ qu'il définit.

Définition : Un diviseur L sur X est dit **grand** lorsque $h^0(X; L) \geq 1$ et Φ_L est génériquement fini.

Définition : Soient $D_1; \cdots; D_r$ des diviseurs effectifs sur X. On dit que $D_1; \cdots; D_r$ **se coupent proprement** lorsque pour toute partie I non vide de $\{1; \cdots; r\}$, la section globale $(1_{D_i})_{i \in I}$ de $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X(D_i)$ est régulière (autrement dit, pour tout $x \in \bigcap_{i \in I} D_i$, en notant φ_i une équation locale de D_i en x, les $(\varphi_i)_{i \in I}$ forment une suite régulière de l'anneau local $\mathcal{O}_{X;x}$).

Remarque : Supposons X de Cohen-Macaulay (par exemple lisse sur K) ; alors d'après le lemme A.7.1 de [7] p. 418, les diviseurs $D_1; \cdots; D_r$ se coupent proprement si et seulement si pour toute partie I non vide de $\{1; \cdots; r\}$, le fermé $\bigcap_{i \in I} D_i$ est purement de codimension $\#I$ dans X (éventuellement vide).

Définition : Lorsque L est un diviseur sur X tel que $q = h^0(X; L) \geq 1$ et E un diviseur effectif non nul sur X, on pose

$$\alpha(L; E) = \frac{1}{q} \sum_{k \geq 1} h^0(X; L - kE) \quad .$$

Introduisons ensuite les notions d'hyperbolicité étudiées dans cet article.

Convention : Lorsque K est un corps de nombres et v une place de K, on désigne par K_v le complété de K en v, et on normalise la valeur absolue $|\ |_v$ de sorte que $|x|_v = |x|^{[K_v:\mathbb{R}]}$ si v est archimédienne et $|p|_v = p^{-[K_v:\mathbb{Q}_p]}$ si v est p-adique.

Lorsque K est un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K, on note $O_{K;S}$ l'anneau des S-entiers de K, *i.e.* l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x|_v \leq 1$ pour toute place finie $v \notin S$.

Soit K un corps de nombres.

Définition : Soient Y une variété sur K, K' une extension finie de K et S un ensemble fini de places de K'. Un ensemble $\mathcal{E} \subset Y(K')$ est dit **S-entier** sur Y lorsqu'il existe un $O_{K';S}$-schéma intègre et quasi-projectif $\mathcal{Y}$ de fibre générique $Y_{K'}$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{Y}(O_{K';S})$.

Définition : Soient Y une variété sur K et K' une extension finie de K. Un ensemble $\mathcal{E} \subset Y(K')$ est dit **quasi-entier** sur Y lorsqu'il existe un ensemble fini S de places de K' tel que $\mathcal{E}$ soit S-entier sur Y.

Définition : Soit Y une variété sur K. On dit que Y est **arithmétiquement quasi-hyperbolique** lorsqu'il existe un fermé $Z \neq Y$ tel que pour toute extension finie K' de K et tout ensemble quasi-entier $\mathcal{E} \subset Y(K')$ sur Y, l'ensemble $\mathcal{E} - Z(K')$ soit fini.

Définition : Soit U une variété complexe. Une **courbe entière** sur U est une application holomorphe $f : \mathbb{C} \to U$ non constante.

Définition : Soit U une variété complexe. On dit que U est **Brody quasi-hyperbolique** lorsqu'il existe un fermé $Z \neq U$ tel que pour toute courbe entière f sur U, on ait $f(\mathbb{C}) \subset Z$.

Terminons cette section avec les énoncés principaux de ce travail. Ces critères de quasi-hyperbolicité généralisent (et simplifient) des résultats de Levin (*cf* théorèmes 8.3A et 8.3B de [10]) et de l'auteur (*cf* théorèmes 3.3 et 3.5 de [1]) :

Théorème 2.1 : *Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. Soient $D_1; \cdots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement. Posons $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_r$. Soit $m \geq 1$ un entier. On suppose que le diviseur $L = m \sum_{i=1}^{r} D_i$ est grand sur X et que $\alpha(L; D_i) > m$ pour tout $i \in \{1; \cdots; r\}$. Alors Y est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

Théorème 2.2 : *Soit V une variété complexe projective de dimension $d \geq 1$. Soient $D_1; \cdots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur V qui se coupent proprement. Posons $U =$*

$V - D_1 \cup \cdots \cup D_r$. Soit $m \geq 1$ un entier. On suppose que le diviseur $L = m\sum_{i=1}^{r} D_i$ est grand sur V et que $\alpha(L; D_i) > m$ pour tout $i \in \{1; \cdots; r\}$. Alors U est Brody quasi-hyperbolique.

3 Préliminaires

Soient K un corps et W un K-espace vectoriel de dimension finie.

Définitions : Une **filtration** de W est une famille décroissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_x)_{x\in\mathbb{R}_+}$ de sous-espaces vectoriels de W telle que $\mathcal{F}_x = \{0\}$ pour tout x assez grand. Une base $\mathcal{B}$ de W est dite **adaptée** à la filtration $\mathcal{F}$ lorsque $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}_x$ est une base de $\mathcal{F}_x$ pour tout réel $x \geq 0$.

Lemme 3.1 : *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtrations de W. Il existe alors une base de W adaptée à $\mathcal{F}$ et à $\mathcal{G}$.*

Démonstration : C'est le lemme 3.2 de [4]. □

Soit r un entier ≥ 1. On note ici Δ l'ensemble des $\underline{t} = (t_1; \cdots; t_r) \in \mathbb{R}_+^r$ tels que $t_1 + \cdots + t_r = 1$.

Définition : Une partie N de $\mathbb{N}^r$ est dite **saturée** lorsque $\underline{a} + \underline{b} \in N$ pour tout $\underline{a} \in \mathbb{N}^r$ et tout $\underline{b} \in N$.

Soit A un anneau local noethérien. Soit $(\varphi_1; \cdots; \varphi_r)$ une suite régulière de A. Pour toute partie saturée N de $\mathbb{N}^r$, on désigne par $\mathcal{I}(N)$ l'idéal de A engendré par l'ensemble $\{\varphi_1^{b_1} \cdots \varphi_r^{b_r}\ ;\ \underline{b} \in N\}$. On aura besoin d'un résultat d'algèbre locale (qui ne sera démontré qu'à la section 6) :

Lemme 3.2 : *Soient N et M deux parties saturées de $\mathbb{N}^r$. On a alors l'égalité d'idéaux*

$$\mathcal{I}(N) \cap \mathcal{I}(M) = \mathcal{I}(N \cap M) \quad .$$

Remarque 3.3 : On utilisera dans la suite le cas particulier suivant du lemme 3.2 : pour $\underline{t} \in \Delta$ et $x \in \mathbb{R}_+$, notons $N(\underline{t}; x)$ l'ensemble des $\underline{b} \in \mathbb{N}^r$ tels que $t_1 b_1 + \cdots + t_r b_r \geq x$. On a alors l'inclusion

$$\mathcal{I}(N(\underline{t}; x)) \cap \mathcal{I}(N(\underline{u}; y)) \subset \mathcal{I}\big(N(\lambda\underline{t} + (1-\lambda)\underline{u}; \lambda x + (1-\lambda)y)\big)$$

pour tous $\underline{t}$, x, $\underline{u}$, y, et tout $\lambda \in [0; 1]$, puisque $N(\underline{t}; x) \cap N(\underline{u}; y) \subset N(\lambda\underline{t} + (1-\lambda)\underline{u}; \lambda x + (1-\lambda)y)$.

Maintenant, soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. Soit L un diviseur sur X tel que $q = h^0(X; L) \geq 1$. Soient $D_1; \cdots; D_r$ des diviseurs effectifs sur X qui se coupent proprement, tels que $\bigcap_{i=1}^{r} D_i$ soit non vide.

Introduisons quelques notations. Soit $\underline{t} \in \Delta$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on définit l'idéal $\mathcal{J}(\underline{t}; x)$ de $\mathcal{O}_X$ par

$$\mathcal{J}(\underline{t}; x) = \sum_{\underline{b} \in N(\underline{t}; x)} \mathcal{O}_X\Big(-\sum_{i=1}^{r} b_i D_i\Big) \quad ,$$

et on pose $\mathcal{F}(\underline{t})_x = \Gamma(X; \mathcal{J}(\underline{t}; x) \otimes L)$. Observons que $(\mathcal{F}(\underline{t})_x)_{x \in \mathbb{R}_+}$ est une filtration de $\Gamma(X; L)$. Pour tout $s \in \Gamma(X; L) - \{0\}$, on note $\mu_{\underline{t}}(s) = \sup\{y \in \mathbb{R}_+ \mid s \in \mathcal{F}(\underline{t})_y\}$.

On pose finalement

$$F(\underline{t}) = \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} h^0(X; \mathcal{J}(\underline{t}; x) \otimes L) \mathrm{d}x \quad .$$

Remarque 3.4 : Soit $\mathcal{B} = (s_1; \cdots; s_q)$ une base de $\Gamma(X; L)$. On a alors l'inégalité

$$F(\underline{t}) \geq \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} \#(\mathcal{F}(\underline{t})_x \cap \mathcal{B}) \mathrm{d}x = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} \mu_{\underline{t}}(s_k) \quad ,$$

qui est même une égalité si $\mathcal{B}$ est adaptée à la filtration $\mathcal{F}(\underline{t})$.

Voici le résultat principal de cette section :

Théorème 3.5 : *L'application $F : \Delta \to \mathbb{R}_+$ ainsi définie est concave. On a en particulier $F(\underline{t}) \geq \min_i \alpha(L; D_i)$ pour tout $\underline{t} \in \Delta$.*

Démonstration : Soient $\underline{t} \in \Delta$, $\underline{u} \in \Delta$ et $\lambda \in [0; 1]$. Il s'agit de montrer que

$$F(\lambda \underline{t} + (1 - \lambda)\underline{u}) \geq \lambda F(\underline{t}) + (1 - \lambda) F(\underline{u}) \quad .$$

Le lemme 3.1 construit une base $\mathcal{B} = (s_1; \cdots; s_q)$ de $W = \Gamma(X; L)$ adaptée aux filtrations $\mathcal{F}(\underline{t})$ et $\mathcal{F}(\underline{u})$.

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}_+^2$. Le lemme 3.2 (*cf* aussi remarque 3.3) fournit l'inclusion d'idéaux $\mathcal{J}(\underline{t}; x) \cap \mathcal{J}(\underline{u}; y) \subset \mathcal{J}(\lambda \underline{t} + (1 - \lambda)\underline{u}; \lambda x + (1 - \lambda)y)$, puisque les diviseurs $D_1; \cdots; D_r$ se coupent proprement. On a en particulier l'inclusion d'espaces vectoriels

$$\mathcal{F}(\underline{t})_x \cap \mathcal{F}(\underline{u})_y \subset \mathcal{F}(\lambda \underline{t} + (1 - \lambda)\underline{u})_{\lambda x + (1 - \lambda) y} \quad .$$

Soit $s \in W - \{0\}$. Ce qui précède implique que s appartient à $\mathcal{F}(\lambda \underline{t} + (1 - \lambda)\underline{u})_{\lambda x + (1 - \lambda) y}$ pour tout $x < \mu_{\underline{t}}(s)$ et tout $y < \mu_{\underline{u}}(s)$. Il en découle la minoration

$$\mu_{\lambda \underline{t} + (1 - \lambda)\underline{u}}(s) \geq \lambda \mu_{\underline{t}}(s) + (1 - \lambda) \mu_{\underline{u}}(s) \quad .$$

On écrit cette inégalité pour $s = s_k$, puis on somme sur k. On obtient alors l'inégalité de concavité en utilisant la remarque 3.4.

La deuxième partie de l'énoncé s'en déduit aisément : en désignant par $(\underline{e}_1; \cdots; \underline{e}_r)$ la base canonique de $\mathbb{R}^r$, on a $F(\underline{t}) \geq \min_i F(\underline{e}_i)$ et $F(\underline{e}_i) = \alpha(L; D_i)$ pour tout $i \in \{1; \cdots; r\}$. $\square$

4 Démonstration des critères

Soient K un corps de nombres et X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. Soit L un faisceau inversible sur X. On munit L d'une métrique adélique $(\| \|_v)_v$ et on pose $\hat{L} = (L; (\| \|_v)_v)$ (pour des précisions sur les métriques adéliques, on pourra consulter le paragraphe 1.2 de [19]).

Définition : Soient K' une extension finie de K et $P \in X(K')$. On définit la **hauteur** (normalisée) $\mathrm{h}_{\hat{L}}(P)$ de P relativement à $\hat{L}$ de la manière suivante :

Choisissons une section rationnelle s de L définie et non nulle en P. On pose

$$\mathrm{h}_{\hat{L}}(P) = -\frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_v \ln \|s(P)\|_v \quad ,$$

où v parcourt l'ensemble des places de K'. Ce réel ne dépend pas du choix de s.

On va utiliser la version suivante du théorème du sous-espace de Schmidt, Schlickewei et Vojta :

Proposition 4.1 : *On suppose L grand sur X. Notons $q = h^0(X; L)$. Soient $s_1; \cdots; s_l$ des sections non nulles engendrant $\Gamma(X; L)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un fermé $Z \neq X$ tel que pour toute extension finie K' de K et tout ensemble fini S de places de K', l'ensemble des points $P \in (X - Z)(K')$ vérifiant*

$$\sum_{v \in S} \max_{J \in \mathcal{L}} \sum_{j \in J} \ln \|s_j(P)\|_v^{-1} \geq (q + q\varepsilon)[K' : \mathbb{Q}]\mathrm{h}_{\hat{L}}(P) \qquad (1)$$

est fini, où $\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des parties J de $\{1; \cdots; l\}$ telles que $(s_j)_{j \in J}$ soit une base de $\Gamma(X; L)$.

Démonstration : Posons $\mathbf{P} = \mathbb{P}(\Gamma(X; L))$. Désignons par $\pi : X' \to X$ l'éclatement de X relativement à $\mathbf{B}_L$ et par $E = \pi^{-1}(\mathbf{B}_L)$ le diviseur exceptionnel. En notant $L' = \mathcal{O}_{X'}(-E) \otimes \pi^* L$, on a un morphisme $\Phi_{L'} : X' \to \mathbf{P}$ génériquement fini qui prolonge Φ_L. Il existe donc un fermé $Z_1 \neq X'$ tel que $\Phi_{L'|X' - Z_1}$ soit à fibres finies.

On munit $L_0 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ d'une métrique adélique $(\| \|'_v)_v$ telle que la section globale 1_E de $\Phi_{L'}^* L_0^\vee \otimes \pi^* L$ vérifie $\sup_{X'_v} \|1_E\|'_v \leq 1$ pour toute place v. On applique alors la version de Vojta (*cf* théorème 0.3 et reformulation 3.4 de [16]) du théorème du sous-espace :

Il existe une réunion finie H de K-hyperplans de $\mathbf{P} \simeq \mathbb{P}_K^{q-1}$ telle que pour toute extension finie K' de K et tout ensemble fini S de places de K', l'ensemble des points $P \in (\mathbf{P} - H)(K')$ vérifiant

$$\sum_{v \in S} \max_{J \in \mathcal{L}} \sum_{j \in J} \ln \|s_j(P)\|_v'^{-1} \geq (q + q\varepsilon)[K' : \mathbb{Q}]\mathrm{h}_{\hat{L}_0}(P) \quad \text{est fini} .$$

Prenons $Z = \mathbf{B}_L \cup \pi(Z_1 \cup \Phi_{L'}^{-1}(H))$. Alors pour toute extension finie K' de K et tout ensemble fini S de places de K', l'ensemble des points $P \in (X - Z)(K')$ vérifiant (1) est fini. □

Montrons donc les critères de quasi-hyperbolicité de la section 2 :

Démonstration du théorème 2.1 : On reprend en l'améliorant la démonstration du théorème 3.3 de [1]. On procède en deux étapes : dans la première, on construit un fermé $Z \neq X$ candidat à contenir "presque tous les points entiers" ; dans la seconde, on prouve que Y est arithmétiquement quasi-hyperbolique.

Étape 1 : Posons $\varepsilon = \dfrac{1}{4m}(\min_i \alpha(L; D_i) - m)$ et $q = h^0(X; L)$, et fixons un entier $b \geq \left(\dfrac{1}{\varepsilon} + 3\right) r$. On choisit aussi une base $\mathcal{B}_0$ de $\Gamma(X; L)$.

Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties I non vides de $\{1; \cdots; r\}$ telles que $\bigcap_{i \in I} D_i$ soit non vide. Soit $I \in \mathcal{P}$. On note Δ_I l'ensemble des $\underline{a} = (a_i)_i \in \mathbb{N}^I$ tels que $\sum_{i \in I} a_i = b$. Soit $\underline{a} \in \Delta_I$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on définit l'idéal $\mathcal{J}(x)$ de $\mathcal{O}_X$ par

$$\mathcal{J}(x) = \sum_{\underline{b}} \mathcal{O}_X\Big(-\sum_{i \in I} b_i D_i\Big) \text{ où la somme porte sur les } \underline{b} \in \mathbb{N}^I \text{ tels que } \sum_{i \in I} a_i b_i \geq bx \ ,$$

et on pose $\mathcal{F}(I; \underline{a})_x = \Gamma(X; \mathcal{J}(x) \otimes L)$. Le lemme 3.1 fournit une base $\mathcal{B}_{I;\underline{a}}$ de $\Gamma(X; L)$ adaptée à la filtration $\mathcal{F}(I; \underline{a})$.

On munit chaque faisceau $\mathcal{O}_X(D_i)$ d'une métrique adélique. Appliquons le théorème du sous-espace (proposition 4.1) avec $\{s_1; \cdots; s_l\} = \mathcal{B}_0 \cup \bigcup_{I;\underline{a}} \mathcal{B}_{I;\underline{a}}$ (remarquons que cette réunion est finie puisque $\mathcal{P}$ et les Δ_I le sont) :

Il existe un fermé $Z \neq X$ tel que pour toute extension finie K' de K et tout ensemble fini S de places de K', l'ensemble des points $P \in (X - Z)(K')$ vérifiant l'inégalité (1) est fini.

Étape 2 : Soient K' une extension finie de K et S un ensemble fini de places de K' contenant les places archimédiennes. Soit $\mathcal{E} \subset Y(K')$ un ensemble S-entier sur Y. Raisonnons par l'absurde en supposant $\mathcal{E} - Z(K')$ infini. Choisissons une suite injective $(P_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{E} - Z(K')$.

Quitte à extraire, on peut supposer (par compacité) que pour tout $v \in S$, la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ converge dans $X(K'_v)$ vers un $y_v \in X(K'_v)$.

Pour tout $v \in S$, on note I_v l'ensemble des $i \in \{1; \cdots; r\}$ tels que $y_v \in D_i$. Quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que pour tout $v \in S$ tel que I_v soit non vide et tout $i \in I_v$, la suite $\left(\dfrac{\ln \|1_{D_i}(P_n)\|_v}{\sum_{j \in I_v} \ln \|1_{D_j}(P_n)\|_v}\right)_{n \geq 0}$ converge vers un $t_{vi} \in [0; 1]$. Observons que l'on a $\sum_{i \in I_v} t_{vi} = 1$.

<u>Fait</u> : Soit $v \in S$. Il existe une base $(s_{1v}; \cdots; s_{qv})$ de $\Gamma(X; L)$ contenue dans $\{s_1; \cdots; s_l\}$ telle que l'on ait la minoration suivante pour tout $n \geq 0$:

$$-\sum_{k=1}^{q} \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq -(q + 2q\varepsilon) \ln \|1_L(P_n)\|_v - O(1) \quad , \qquad (2)$$

où le $O(1)$ est indépendant de n.

Prouvons ce fait. Si I_v est vide, on prend $\{s_{1v};\cdots;s_{qv}\}=\mathcal{B}_0$ et on obtient la minoration (2) en remarquant que $\ln\|1_L(P_n)\|_v=O(1)$ (puisque $y_v\notin L$).

On suppose maintenant I_v non vide. On a donc $I_v\in\mathcal{P}$. Choisissons un $\underline{a}_v=(a_{vi})_i\in\Delta_{I_v}$ tel que $a_{vi}\le(b+r)t_{vi}$ pour tout $i\in I_v$. On prend alors $\{s_{1v};\cdots;s_{qv}\}=\mathcal{B}_{I_v;\underline{a}_v}$. Vérifions que ce choix convient.

Soit $s\in\Gamma(X;L)-\{0\}$. Notons $\mu(s)$ le plus grand rationnel μ tel que $s\in\mathcal{F}(I_v;\underline{a}_v)_\mu$. En écrivant localement $s=\sum_{\underline{b}}f_{\underline{b}}\prod_{i\in I_v}1_{D_i}^{b_i}$ au voisinage de y_v, on trouve

$$-\ln\|s(P_n)\|_v\ge-\max_{\underline{b}}\sum_{i\in I_v}b_i\ln\|1_{D_i}(P_n)\|_v-O(1)\quad.$$

Par définition des t_{vi}, on a :

$$-b_i\ln\|1_{D_i}(P_n)\|_v\ge-\Big(\frac{a_{vi}b_i}{b+r}-\frac{m\varepsilon}{r}\Big)\sum_{j\in I_v}\ln\|1_{D_j}(P_n)\|_v$$

pour tout n assez grand et tout $i\in I_v$.

On en déduit l'inégalité (pour tout $n\ge0$)

$$-\ln\|s(P_n)\|_v\ge-\Big(\frac{\mu(s)b}{b+r}-m\varepsilon\Big)\sum_{j\in I_v}\ln\|1_{D_j}(P_n)\|_v-O(1)\quad.$$

On écrit cette inégalité pour $s=s_{kv}$, puis on somme sur k. En observant que l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{q}\mu(s_{kv}) &= \int_0^{+\infty}\dim\mathcal{F}(I_v;\underline{a}_v)_x\mathrm{d}x && \text{(remarque 3.4)}\\ &\ge \min_i\alpha(L;D_i)q && \text{(théorème 3.5)}\\ &= (1+4\varepsilon)qm\ge\frac{b+r}{b}(q+3q\varepsilon)m\quad,\end{aligned}$$

on obtient alors

$$-\sum_{k=1}^{q}\ln\|s_{kv}(P_n)\|_v\ge-(q+2q\varepsilon)m\sum_{j\in I_v}\ln\|1_{D_j}(P_n)\|_v-O(1)\quad.$$

Le fait énoncé (2) s'en déduit en remarquant que $\ln\|1_{D_j}(P_n)\|_v=O(1)$ pour tout $j\notin I_v$.

Maintenant, l'ensemble $\mathcal{E}$ est S-entier sur Y, donc pour tout $n\ge0$, on a

$$[K':\mathbb{Q}]\mathrm{h}_{\hat{L}}(P_n)=-\sum_{v\in S}\ln\|1_L(P_n)\|_v+O(1)\quad.$$

En utilisant la minoration (2), on trouve (pour tout $n\ge0$)

$$-\sum_{v\in S}\sum_{k=1}^{q}\ln\|s_{kv}(P_n)\|_v\ge(q+2q\varepsilon)[K':\mathbb{Q}]\mathrm{h}_{\hat{L}}(P_n)-O(1)\quad.$$

D'où une contradiction avec (1). $\square$

Démonstration du théorème 2.2 : On reprend de la même manière la démonstration du théorème 3.5 de [1], qui utilise la version de Vojta (*cf* théorème 2 de [18]) du théorème de Cartan au lieu du théorème du sous-espace. Les détails sont laissés au lecteur. $\square$

5 Démonstration des théorèmes 1.3 et 1.4

Soient K un corps de nombres et X une variété projective sur K de dimension $d \geq 2$. Pour tous diviseurs $L_1; \cdots; L_d$ sur X, on désigne par $\langle L_1 \cdots L_d \rangle$ leur nombre d'intersection.

Définition : Un diviseur L sur X est dit **big** lorsque $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n^d} h^0(X; nL) > 0$.

Remarque : D'après le lemme de Kodaira (*cf* [9] p. 141), le diviseur L est big si et seulement si nL est grand pour tout entier n assez grand.

Définition : Soit L un diviseur big sur X. On dit que L est **presque ample** lorsqu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathbf{B}_{nL}$ soit vide.

On montre ici de légères extensions des théorèmes 1.3 et 1.4 de l'introduction :

Théorème 1.3bis : *Soient $D_1; \cdots; D_{2d}$ des diviseurs effectifs presque amples sur X qui se coupent proprement. Alors $X - D_1 \cup \cdots \cup D_{2d}$ est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

Démonstration : D'après le théorème 4.4 de [1], il existe $(m_1; \cdots; m_{2d}) \in (\mathbb{N}^*)^{2d}$ tel qu'en posant $L = \sum_{i=1}^{2d} m_i D_i$, on ait

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\alpha(nL; m_i D_i) > 1 \text{ pour tout } i \in \{1; \cdots; 2d\} .$$

On en déduit le résultat en appliquant le théorème 2.1 (les diviseurs $m_1 D_1; \cdots; m_{2d} D_{2d}$ se coupent encore proprement). $\square$

Théorème 1.4bis : *Soient $D_1; \cdots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement, avec $r \geq d+2$. Posons $L = \sum_{i=1}^{r} D_i$ et $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_r$. On suppose que $L - (d+1)D_i$ est ample pour tout $i \in \{1; \cdots; r\}$. Alors Y est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

Démonstration : D'après le lemme 5.1 ci-dessous, on a $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\alpha(nL; D_i) > 1$ pour tout $i \in \{1; \cdots; r\}$. On obtient le résultat en appliquant le théorème 2.1. $\square$

Lemme 5.1 : *Soient L un diviseur ample sur X et D un diviseur effectif non nul sur X. Soit $t \geq 1$ un entier tel que $L - tD$ soit ample. On a alors les minorations*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\alpha(nL;D) \geq \frac{t}{(d+1)\langle L^d\rangle}\sum_{j=0}^{d}\langle L^{d-j}(L-tD)^j\rangle > \frac{t}{d+1} \quad .$$

Démonstration : La formule de Hirzebruch-Riemann-Roch donne que $\chi(X;nL-kD)$ est une fonction polynomiale en $(n;k)$ dont on peut expliciter la composante homogène dominante :

Pour tout $(n;k)$ tel que $0 \leq k \leq tn$, on a $\chi(X;nL-kD) = \frac{1}{d!}\langle (nL-kD)^d\rangle + O(n^{d-1})$.

Par ailleurs, pour tout n assez grand et tout $k \in \{0;\cdots;tn\}$, on a $h^i(X;nL-kD) = 0$ pour tout $i \geq 1$, puisque L et $L-tD$ sont amples. On a en particulier $h^0(X;nL-kD) = \frac{1}{d!}\langle (nL-kD)^d\rangle + O(n^{d-1})$.

On trouve ainsi les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{tn} h^0(X;nL-kD) &= \frac{1}{d!}\sum_{k=1}^{tn}\Big[\langle (nL-kD)^d\rangle + O(n^{d-1})\Big] \\
&= \frac{1}{d!}\sum_{j=0}^{d}\sum_{k=1}^{tn} \mathrm{C}_d^j\langle L^{d-j}D^j\rangle n^{d-j}(-k)^j + O(n^d) \\
&= \frac{1}{d!}\sum_{j=0}^{d} \mathrm{C}_d^j\langle L^{d-j}D^j\rangle \frac{(-1)^j}{j+1}t^{j+1}n^{d+1} + O(n^d) \quad .
\end{aligned}$$

Or un calcul montre (par multilinéarité) la formule

$$\sum_{j=0}^{d} \mathrm{C}_d^j\langle L^{d-j}D^j\rangle \frac{(-1)^j}{j+1}t^{j+1} = \frac{t}{d+1}\sum_{j=0}^{d}\langle L^{d-j}(L-tD)^j\rangle \quad .$$

D'où la première inégalité de l'énoncé.

La deuxième inégalité s'en déduit facilement : les diviseurs L et $L-tD$ sont amples, donc on a $\langle L^{d-j}(L-tD)^j\rangle > 0$ pour tout $j \in \{1;\cdots;d\}$. $\square$

6 Démonstration du lemme 3.2

Soit A un anneau local noethérien. On aura besoin d'un résultat classique dû à Krull :

Lemme 6.1 : *Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux de A avec $\mathcal{J} \neq A$. On a alors l'égalité*

$$\bigcap_{k\geq 1}\Big(\mathcal{I} + \mathcal{J}^k\Big) = \mathcal{I} \quad .$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le corollaire 11.D.2 de [11] p. 69 dans l'anneau $A/\mathcal{I}$. $\square$

Soit $(\varphi_1;\cdots;\varphi_r)$ une suite régulière de A. Rappelons que pour toute partie saturée N de $\mathbb{N}^r$, on désigne par $\mathcal{I}(N)$ l'idéal $\left\langle \varphi_1^{b_1}\cdots\varphi_r^{b_r}\ ;\ \underline{b}\in N\right\rangle$ de A. Le lemme 3.2 est une conséquence directe de l'énoncé suivant :

Lemme 6.2 : *Soit N une partie saturée de $\mathbb{N}^r$. On a alors l'égalité d'idéaux*

$$\mathcal{I}(N) = \bigcap_{\underline{c}\in\mathbb{N}^r-N} \left\langle \varphi_1^{c_1+1};\cdots;\varphi_r^{c_r+1}\right\rangle \quad .$$

Démonstration : Notons ici $\mathcal{I}_1(N) = \bigcap_{\underline{c}\in\mathbb{N}^r-N} \left\langle \varphi_1^{c_1+1};\cdots;\varphi_r^{c_r+1}\right\rangle$. Vérifions d'abord l'inclusion $\mathcal{I}(N)\subset\mathcal{I}_1(N)$: si $\underline{b}\in N$ et $\underline{c}\in\mathbb{N}^r-N$, alors il existe un indice i tel que $b_i\geq c_i+1$, donc $\varphi_1^{b_1}\cdots\varphi_r^{b_r}\in\varphi_i^{c_i+1}A\subset\left\langle \varphi_1^{c_1+1};\cdots;\varphi_r^{c_r+1}\right\rangle$.

On prouve l'inclusion $\mathcal{I}_1(N)\subset\mathcal{I}(N)$ par récurrence sur r. Le cas $r=1$ est facile (avec le lemme 6.1 si N est vide). Supposons $r\geq 2$ et le résultat au cran $r-1$. Montrons par une (deuxième) récurrence sur k que $\mathcal{I}_1(N)\subset\mathcal{I}(N)+\varphi_1^kA$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Si $k=0$, cette inclusion est évidente. Supposons $k\geq 1$ et le résultat au cran $k-1$. Soit s un élément de $\mathcal{I}_1(N)$. Il s'écrit $s=x+\varphi_1^{k-1}a$ avec un $x\in\mathcal{I}(N)$ et un $a\in A$.

Posons $N_k=\{\underline{b}=(b_2;\cdots;b_r)\in\mathbb{N}^{r-1}\mid(k-1;b_2;\cdots;b_r)\in N\}$. Soit $\underline{b}\in\mathbb{N}^{r-1}-N_k$. Alors $\varphi_1^{k-1}a=s-x$ appartient à $\mathcal{I}_1(N)$ donc en particulier à $\left\langle\varphi_1^k;\varphi_2^{b_2+1};\cdots;\varphi_r^{b_r+1}\right\rangle$. Autrement dit, il existe $a'\in A$ tel que $\varphi_1^{k-1}a-\varphi_1^ka'\in\left\langle\varphi_2^{b_2+1};\cdots;\varphi_r^{b_r+1}\right\rangle$. Puisque $(\varphi_2^{b_2+1};\cdots;\varphi_r^{b_r+1};\varphi_1)$ est une suite régulière de A, on obtient $a-\varphi_1a'\in\left\langle\varphi_2^{b_2+1};\cdots;\varphi_r^{b_r+1}\right\rangle$ en simplifiant par φ_1^{k-1}. Réduisons modulo φ_1 ; on trouve dans $A'=A/\varphi_1A$ que $\bar{a}\in\left\langle{\bar{\varphi}_2}^{b_2+1};\cdots;{\bar{\varphi}_r}^{b_r+1}\right\rangle$.

On a ainsi que $\bar{a}\in\bigcap_{\underline{b}\in\mathbb{N}^{r-1}-N_k}\left\langle{\bar{\varphi}_2}^{b_2+1};\cdots;{\bar{\varphi}_r}^{b_r+1}\right\rangle$. Or $(\bar{\varphi}_2;\cdots;\bar{\varphi}_r)$ est une suite régulière de A', donc $\bar{a}\in\left\langle{\bar{\varphi}_2}^{b_2}\cdots{\bar{\varphi}_r}^{b_r}\ ;\ \underline{b}\in N_k\right\rangle$ par la première hypothèse de récurrence. On écrit $a=y+\varphi_1a_1$ avec $y\in\left\langle\varphi_2^{b_2}\cdots\varphi_r^{b_r}\ ;\ \underline{b}\in N_k\right\rangle$ et $a_1\in A$. Il en découle l'égalité $s=x+\varphi_1^{k-1}y+\varphi_1^ka_1$ avec $\varphi_1^{k-1}y\in\left\langle\varphi_1^{k-1}\varphi_2^{b_2}\cdots\varphi_r^{b_r}\ ;\ \underline{b}\in N_k\right\rangle\subset\mathcal{I}(N)$, qui implique bien que s est dans $\mathcal{I}(N)+\varphi_1^kA$.

D'où l'inclusion $\mathcal{I}_1(N)\subset\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\left(\mathcal{I}(N)+\varphi_1^kA\right)$. On conclut par le lemme 6.1. $\square$

Références

[1] *P. Autissier :* Géométrie, points entiers et courbes entières. Annales Scientifiques de l'ENS **42** (2009), 221-239.

[2] *Y. Bilu :* The many faces of the subspace theorem (after Adamczewski, Bugeaud, Corvaja, Zannier...). Astérisque **317** (2008), 1-38.

[3] *P. Corvaja, U. Zannier :* A subspace theorem approach to integral points on curves. C.R.A.S. **334** (2002), 267-271.

[4] *P. Corvaja, U. Zannier :* On integral points on surfaces. Annals of Math. **160** (2004), 705-726.

[5] *P. Corvaja, A. Levin, U. Zannier :* Integral points on threefolds and other varieties. Tohoku Math. Journal **61** (2009), 589-601.

[6] *G. Faltings :* Diophantine approximation on abelian varieties. Annals of Math. **133** (1991), 549-576.

[7] *W. Fulton :* Intersection theory (second edition). Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete **2** (1998).

[8] *S. Lang :* Number theory III. Encyclopaedia of Math. Sciences **60** (1991).

[9] *R. Lazarsfeld :* Positivity in algebraic geometry I. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete **48** (2004).

[10] *A. Levin :* Generalizations of Siegel's and Picard's theorems. Annals of Math. **170** (2009), 609-655.

[11] *H. Matsumura :* Commutative algebra (second edition). Math. Lecture Note Series **56** (1980).

[12] *H.P. Schlickewei :* The p-adic Thue-Siegel-Roth-Schmidt theorem. Archiv der Math. **29** (1977), 267-270.

[13] *W.M. Schmidt :* Diophantine approximation. Lecture Notes in Math. **785** (1980).

[14] *J.P. Serre :* Lectures on the Mordell-Weil theorem (third edition). Aspects of Math. **15** (1997).

[15] *P. Vojta :* Diophantine approximations and value distribution theory. Lecture Notes in Math. **1239** (1987).

[16] *P. Vojta :* A refinement of Schmidt's subspace theorem. American Journal of Math. **111** (1989), 489-518.

[17] *P. Vojta :* Integral points on subvarieties of semiabelian varieties I. Inventiones Math. **126** (1996), 133-181.

[18] *P. Vojta :* On Cartan's theorem and Cartan's conjecture. American Journal of Math. **119** (1997), 1-17.

[19] *S. Zhang :* Small points and adelic metrics. Journal of Algebraic Geometry **4** (1995), 281-300.

Pascal Autissier. I.M.B., université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France.

pascal.autissier@math.u-bordeaux1.fr