Université Bordeaux I - 2011
N1MA5011
Liste d'exercices 1

Anneaux, éléments inversibles, éléments nilpotents.

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Lesquels de ces sous-ensembles de $\mathbb{C}$ sont des anneaux ? des corps ?

1. $\mathbb{N}$
2. $\mathbb{Q}[i] := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$
3. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$
5. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} 10^{-n}\mathbb{Z}$

Exercice 2.

1. Si $x.y$ est inversible dans un anneau A alors x et y sont inversibles dans A.
2. Montrer que dans un anneau non nul, un inversible n'est pas un diviseur de zéro et un diviseur de zéro n'est pas inversible.

Exercice 3. Déterminer le groupe des inversibles des anneaux de l'exercice 1.

Exercice 4. Démontrer que si $x \in A$ est nilpotent alors $1 + x$ est inversible dans A. Si x et y sont nilpotents et commutent, montrer que xy et $x + y$ sont nilpotents.

Exercice 5. L'anneau $C := A \times A$ est-il intègre ? Décrire les ensembles des éléments inversibles, des diviseurs de zéro et des éléments nilpotents de l'anneau C.

Exercice 6. Trouver les éléments inversibles, les diviseurs de zéros et les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/81\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Montrer qu'un anneau fini intègre est un corps.

Exercice 8. Soient a et n deux entiers avec $n \neq 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1 L'élément $\bar{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2 L'élément $\bar{a}$ est simplifiable dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3 a et n sont premiers entre eux.

Exercice 9. Soient $n, m \geq 1$ et $P(X) := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in A[X]$.

1 Prouver que $P(X)$ est nilpotent si et seulement si $a_0, \ldots, a_n$ sont nilpotents.

2-a Soit $Q(X) := \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in A[X]$ tel que $P(X)Q(X) = 1$. Montrer que pour $0 \leq k \leq m$, $a_n^{k+1} b_{m-k} = 0$. En déduire que a_n est nilpotent.

2-b Montrer que $P(X) \in A[X]^\times$ si et seulement si $a_0 \in A^\times$ et $a_1, \ldots, a_n$ sont nilpotents.

(On utilisera l'exercice 4).

Exercice 10. Soit $P \in A[X]$ avec $\deg P(X) = n$. Montrer qu'il existe des polynômes $Q_j \in A[X]$, $j = 0, \ldots, n$ tels que $P(X+Y) = \sum_{j=0}^{n} Q_j(X) Y^j$. Montrer que si $A = \mathbb{C}$ alors $Q_j = P^{(j)}/j!$.