Université Bordeaux I - 2011
N1MA5011
Liste d'exercices 8

Polynômes cyclotomiques, éléments algébriques.

Exercice 1. Expliciter $\Phi_n(X)$ pour $1 \leq n \leq 10$.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$ on note $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ le n-ième polynôme cyclotomique.

1 Quelle est la décomposition en facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{Q}[X]$ de $X^n - 1$?

2 Montrer que $X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ si et seulement si n est premier.

3 Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $X^9 + X^8 + \ldots + X + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 3. Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ des corps tels que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$. Montrer qu'un élément $\alpha \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps.

Exercice 4. Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des extensions algébriques finies de $\mathbb{Q}$ et déterminer leur degré sur $\mathbb{Q}$ dans ce cas.

$$\mathbb{Q} \oplus i\mathbb{Q} \quad \mathbb{Q} \oplus \sqrt{5}\mathbb{Q} \quad \mathbb{Q} \oplus \sqrt[3]{2}\mathbb{Q} \quad \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{C} \quad \mathbb{Q}(X)$$

Exercice 5. Soit $P(X) = X^3 + X + 1$.

1 Montrer que $P(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2 Soit α une racine (dans $\mathbb{C}$) de $P(X)$. Montrer que l'on peut écrire $\frac{\alpha}{\alpha^2+1}$ sous la forme $g(\alpha)$ avec $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré ≤ 2. Expliciter $g(X)$.

Exercice 6. Calculer $\mathrm{Irr}(\sqrt{X}, \mathbb{C}(X), Y)$.

Exercice 7. Calculer le degré de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}]$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 8. Soit $\zeta_n \in \mathbb{C}$ une racine primitive n-ième de l'unité. Quel est le degré de ζ_n sur $\mathbb{Q}$? Quel est le degré de $\cos(2\pi/n)$ sur $\mathbb{Q}$?