

La constante de Khintchine

Nicolas Mascot

TNT HD

23 octobre 2012

Fractions continuées

Nous allons parler de *fractions continuées*.

Voici une fraction continuée :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}} \quad (a_i \in \mathbb{N}^*)$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée.

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\ 625}{6\ 842}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\,625}{6\,842} = 2 + \frac{1941}{6842}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\,625}{6\,842} = 2 + \frac{1}{\frac{6842}{1941}}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\,625}{6\,842} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1\,019}{1\,941}}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\,625}{6\,842} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1\,019}{1\,941}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{922}{1\,019}}}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\,625}{6\,842} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1\,019}{1\,941}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{922}{1\,019}}} = \dots$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\frac{15\,625}{6\,842} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{48}}}}}}}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \ddots}}}}$$

Développement d'un réel en fraction continuée

Tout réel admet un développement en fraction continuée. Par exemple :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Approximation par une fraction continuée

Les fractions continuées fournissent de très bonnes approximations rationnelles :

Approximation par une fraction continuée

Les fractions continuées fournissent de très bonnes approximations rationnelles :

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 3 = 3 \\ \pi &= 3.14159265358979\dots\end{aligned}$$

Approximation par une fraction continuée

Les fractions continuées fournissent de très bonnes approximations rationnelles :

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.14285714285714 \\ \pi &= 3.14159265358979 \dots\end{aligned}$$

Approximation par une fraction continuée

Les fractions continuées fournissent de très bonnes approximations rationnelles :

$$\pi_2 = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106} = 3.14150943396226 \dots$$
$$\pi = 3.14159265358979 \dots$$

Approximation par une fraction continuée

Les fractions continuées fournissent de très bonnes approximations rationnelles :

$$\pi_3 = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3.14159292035398 \dots$$

$$\pi = 3.14159265358979 \dots$$

Notation

Nous noterons $a_i(x)$ les coefficients du développement en fraction continuée d'un réel $x \in \mathbb{R}$:

$$x = a_0(x) + \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \frac{1}{a_3(x) + \ddots}}}$$

Le théorème de Khintchine

Théorème (Khintchine, 1935)

Pour presque tout réel x (au sens de Lebesgue),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1(x)a_2(x) \cdots a_n(x)} = K, \text{ où}$$

$$K = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{\frac{\ln n}{\ln 2}} = 2.685452 \dots$$

est la *constante de Khintchine*.

Soit (X, \mathcal{X}, μ) un espace probabilisé, et soit $T: X \longrightarrow X$ une application mesurable.

Soit (X, \mathcal{X}, μ) un espace probabilisé, et soit $T: X \rightarrow X$ une application mesurable.

Définition

T est dite *ergodique* si

Soit (X, \mathcal{X}, μ) un espace probabilisé, et soit $T: X \longrightarrow X$ une application mesurable.

Définition

T est dite *ergodique* si

① $\forall E \in \mathcal{X}, \mu(T^{-1}(E)) = \mu(E),$

Soit (X, \mathcal{X}, μ) un espace probabilisé, et soit $T: X \rightarrow X$ une application mesurable.

Définition

T est dite *ergodique* si

- 1 $\forall E \in \mathcal{X}, \mu(T^{-1}(E)) = \mu(E),$
- 2 $\forall E \in \mathcal{X}, T^{-1}(E) = E \implies \mu(E) = 0$ ou $1.$

Le théorème ergodique de Birkhoff

Soit (X, \mathcal{X}, μ) un espace probabilisé, et soit $T: X \rightarrow X$ une application mesurable.

Théorème (Birkhoff, 1933)

Si T est ergodique, alors pour toute $\varphi \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x) = \int_X \varphi(x) \mu(dx)$$

pour μ -presque tout x .

L'opérateur de Gauss-Kuzmin

Soit $X = [0; 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ muni de sa tribu borélienne.

L'opérateur de Gauss-Kuzmin

Soit $X = [0; 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ muni de sa tribu borélienne, et de la mesure de Gauss-Kuzmin

$$\mu(dx) = \frac{1}{\ln 2} \frac{dx}{1+x}.$$

L'opérateur de Gauss-Kuzmin

Soit $X = [0; 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ muni de sa tribu borélienne, et de la mesure de Gauss-Kuzmin

$$\mu(dx) = \frac{1}{\ln 2} \frac{dx}{1+x}.$$

L'opérateur de Gauss-Kuzmin est

$$T: X \longrightarrow X$$
$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}} \longmapsto \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}.$$

L'opérateur de Gauss-Kuzmin

Soit $X = [0; 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ muni de sa tribu borélienne, et de la mesure de Gauss-Kuzmin

$$\mu(dx) = \frac{1}{\ln 2} \frac{dx}{1+x}.$$

L'opérateur de Gauss-Kuzmin est

$$\begin{aligned} T: X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \{1/x\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{-1}([0; t]) &= \left\{ x \in X \mid \{1/x\} \leq t \right\} \\ &= \left\{ x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : n \leq 1/x \leq n + t \right\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+t}; \frac{1}{n} \right] \cap X \end{aligned}$$

μ est T -invariante

$$T^{-1}([0; t]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n+t}; \frac{1}{n} \right] \cap X$$

donc

$$\begin{aligned} \mu(T^{-1}([0; t])) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{n+t}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+t}} \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n+t}{n} \frac{n+1}{n+t+1} \right) \\ &= \ln(1+t) = \mu([0; t]). \end{aligned}$$

Un théorème de Lebesgue

Théorème de différentiation de Lebesgue (1910)

Soit $f \in L^1([0; 1])$. Pour presque tout $x \in [0; 1]$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t) dt = f(x).$$

Un théorème de Lebesgue

Théorème de différentiation de Lebesgue (1910)

Soit $f \in L^1([0; 1])$. Pour presque tout $x \in [0; 1]$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t) dt = f(x).$$

Corollaire (Théorème de densité de Lebesgue)

Soit $E \subseteq [0; 1]$ une partie mesurable. Pour presque tout $x \in E$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(E \cap [x - \varepsilon; x + \varepsilon])}{2\varepsilon} = 1.$$

T est ergodique

Soit $E \subset X$ telle que $T^{-1}(E) = E$, avec $\lambda(E) = d < 1$.
Soit $\xi \in X$, notons $\xi_{2n-1} = \frac{p}{q}$ et $\xi_{2n} = \frac{p'}{q'}$. Soient $s = \frac{p}{q}$ et $t = \frac{p+p'}{q+q'}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-s} \int_s^t \mathbb{1}_E(y) dy &= q'(q+q') \int_s^t \mathbb{1}_E(y) dy \\ &= q'(q+q') \int_0^1 \mathbb{1}_E(x) \frac{dx}{(qx+q')^2} \\ &\stackrel{y=\frac{px+p'}{qx+q'}}{=} \\ &\leq q'(q+q') \int_0^d \frac{dx}{(qx+q')^2} \\ &= \dots < 1. \end{aligned}$$

Donc $\mu(E) = 0$ d'après le théorème de densité de Lebesgue.

Le théorème de Lévy

Soit $m \in \mathbb{N}^*$; prenons $\varphi(x) = \mathbb{1}_{a_1(x)=m}$.

Alors d'après le théorème ergodique, pour presque tout x ,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{a_1(T^k x)=m} &= \int_0^1 \mathbb{1}_{a_1(x)=m} \mu(dx) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{a_k(x)=m} &= \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} \frac{dx}{1+x} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{m(m+2)} \right).\end{aligned}$$

Le théorème de Lévy

Théorème (Lévy, 1937)

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, la proportion de m dans le développement en fraction continuée de presque tout réel x est $\frac{1}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{m(m+2)} \right)$.

Le théorème de Lévy

$$\mathbb{P}(a_k(x) = m) = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{m(m+2)} \right)$$

Valeur de m	Fréquence
1	41,5 %
2	17,0 %
3	9,3 %
4	5,9 %
5	4,1 %
10	1,2 %
42	0,078 %
100	0,014 %
> 100	1,4 %

Le théorème de Khintchine

À présent, prenons $\varphi(x) = \ln a_1(x)$. Nous obtenons pour presque tout x

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k(x) &= \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \ln a_1(x) \frac{dx}{1+x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\ln 2} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)\end{aligned}$$

d'où le résultat en passant à l'exponentielle.

Le théorème de Khintchine

Théorème (Khintchine, 1935)

Pour presque tout réel x ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1(x)a_2(x) \cdots a_n(x)} = K, \text{ où}$$

$$K = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{\frac{\ln n}{\ln 2}} = 2.685452 \dots$$