IUT HSE
Introduction aux probabilités et statistiques

Philippe Jaming

Institut Mathématique de Bordeaux
Philippe.Jaming@gmail.com
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~ pjaming/

Probabilités discrètes

Definition

- *Expérience aléatoire* ou *épreuve* : expérience dont le résultat ne peux pas être prédis.
- *Ensemble fondamental* : ensemble de tous les résultats possibles.
- *Évènement* : toute partie de Ω, c.à.d. tout ensemble de résultats possibles. Il sont dits *élémentaires* s'ils n'ont qu'un seul élément.
- *Évènement certain* : Ω, *évènement impossible* : $\emptyset$. Si E est un évènement $\bar{E} = \mathbb{E}^c = \Omega \setminus E$ *évènement contraire*.
- Si E_1, E_2 deux évènements, is sont *incompatibles* si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Definition

Une probabilité est une application $\mathbb{P}$ qui à un évènement associe un nombre et vérife

- $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$.
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Si E_1 et E_2 sont incompatibles, alors $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2)$. Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_n$ sont deux à deux incompatibles, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$.

Propriétés

- $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \leq \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2)$;
- $\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$.

Exemple : Équiprobabilité

On suppose que Ω *fini* et que tous les évènements élémentaires ont même probabilité. Donc

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Exemple : on lance 2 fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire.
Il y $6 \times 6 = 36$ couples de résultats possible en lançant deux dés et parmi elle 6 paires, on a donc $\mathbb{P}(\textit{paire}) = \frac{6}{36}$.
On a ici fait un tirage avec ordre $(6, 1) \neq (1, 6)$. Que se passe-t-il si on effectue un tirage avec ordre ?

Definition

E_1, E_2 deux évènements avec $\mathbb{P}(E_2) \neq 0$. La *probabilité de E_1 sachant E_2* est

$$\mathbb{P}(E_1|E_2) = \frac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_2)}.$$

Exemple

On lance un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 sachant que le résultat est pair.
$E_1 = \{4, 5, 6\}$, $E_2 = \{2, 4, 6\}$ donc $E_1 \cap E_2 = \{4, 6\}$ d'où
$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 2/6 = 1/3$ et $\mathbb{P}(E_2) = 3/6 = 1/2$.
Ainsi $P(E_1|E_2) = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$.

Utilisation la plus commune :

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_1|E_2)\mathbb{P}(E_2).$$

Théorème (Bayes)

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité dont l'ensemble fondamental est Ω.
$E_1, \ldots, E_n$ deux à deux incompatibles ($E_i \cap E_j = \emptyset$) de réunion Ω , $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega$. Alors, pour tout évènement A,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|E_1)\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(A|E_2)\mathbb{P}(E_2) + \cdots + \mathbb{P}(A|E_n)\mathbb{P}(E_n).$$

Pour $n = 2$, $E = E_1$ et $\bar{E} = E_2$. Alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap E) + \mathbb{P}(A \cap \bar{E}) = \mathbb{P}(A|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A|\bar{E})\mathbb{P}(\bar{E}).$$

Exemple

Une enquête révèle que parmi les automobilistes (évènement I), 60% connaissent mal le code de la route.
Parmi ceux-ci, 25% ont déjà provoqué un accident (évènement A).
30% des personnes connaissent bien le connaissent le code, mais ne l'appliquent pas, notemment les limitations de vitesse (évènement V).
Parmi celle-ci, 40% ont déjà provoqué un accident.
Les 10% restant connaissent et appliquent le code de la route. (évènement C).
Parmi celle-ci, 10% ont déjà provoqué un accident.
Un automobiliste vient d'avoir un accident. Quelle est la probabilité qu'il fasse parti de la première catégorie.

L'ensemble fondamental Ω est l'ensemble des automobilistes. Il se divise en trois parties :
– I ceux qui connaissent mal le code : $\mathbb{P}(I) = 60\% = 60/100 = 0.6$.
– V ceux qui connaissent le code mais l'appliquent mal :
$\mathbb{P}(V) = 30\% = 0.3$.
– C ceux qui connaissent et appliquent le code : $\mathbb{P}(C) = 10\% = 0.1$.
On a les données suivantes : $\mathbb{P}(A|I) = 25\% = 0.25$,
$\mathbb{P}(A|V) = 40\% = 0.4$ et $\mathbb{P}(A|C) = 10\% = 0.1$.
On veut $\mathbb{P}(I|A) = \dfrac{\mathbb{P}(I \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A|V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C) = 0.25 \times 0.6 + 0.4 \times 0.3 + 0.1 \times 0.1$$

et $\mathbb{P}(I \cap A) = \mathbb{P}(A|I)\mathbb{P}(I) = 0.25 * 0.6 = 0.15$. Donc $\mathbb{P}(I|A) \simeq 0.54$.