Test d'hypothèse

Objectif : prendre une décision sur la base d'un échantillon d'une variable aléatoire X.
Méthode : 1. Formuler une *hypothèse nulle* notée H_0
à tester contre une *hypothèse alternative* notée H_1.

Exemples

1. On veut tester si une pièce est biaisée : X suit $\mathcal{B}(p)$. H_0= pièce équilibrée ($p = 0.5$) et H_1, $p \neq 0.5$.
2. Nous voulons montrer qu'un médicament est efficace. On introduit

$$\begin{aligned} m_1 = & \text{ temps de guérison avec médicament} \\ m_0 = & \text{ temps de guérison sans médicament} \end{aligned}.$$

$H_0 : m_1 > m_0$ et donc $H_1 = m_0 \geq m_1$.

Definition

Un *test d'hypothèse de H_0 relativement à H_1* est une expérience telle que

$$\begin{cases} \text{réussie} & \Rightarrow \text{ on accèpte } H_0 \\ \text{échec} & \Rightarrow \text{ on rejète } H_0 \text{ on accèpte } H_1 \end{cases}.$$

2 types erreur : $1^{\text{ère}}$ espèce on rejette à tort H_0, $1^{\text{ème}}$ espèce on accepte à tort H_0.
niveau de signification du test = probabilité maximale de faire une erreur de première espèce.

Test à l'aide de TCL

X v.a. de moyenne μ *inconnue* de variance σ^2 *connue ou non*.

$H_0 : \mu = \mu_0$ et $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Niveau de signification :α

$(x_1, \ldots, x_n)$ échantillon de taille n de n copies indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de X. $\tilde{\mu}$ réalisation de $Y = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et Z t.q. $\frac{\sigma Z}{\sqrt{n}} = Y - \mu$.
TCL : Z suit $\mathcal{N}(0, 1)$ et on connait u_α t.q. $\mathbb{P}[|Z| > u_\alpha] = \alpha \Rightarrow$ $\left|\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu - \tilde{\mu})\right| > u_\alpha$ ne se produit qu'avec probabilité α.

$$\text{Si } \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\tilde{\mu} - \mu_0| \leq u_\alpha \text{ on garde } H_0, \text{ sinon on rejette } H_0.$$

Niveau de signification : α. $\rightarrow$ test bilatéral.

Test unilatéral

X v.a. de moyenne μ *inconnue* de variance σ^2 *connue ou non*.

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ et $H_1 : \mu > \mu_0$. Niveau de signification :α

$(x_1, \ldots, x_n)$ échantillon de taille n de n copies indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de X. $\tilde{\mu}$ réalisation de $Y = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et Z t.q. $\frac{\sigma Z}{\sqrt{n}} = Y - \mu$.
TCL : Z suit $\mathcal{N}(0, 1)$ et on connait U_α t.q. $\mathbb{P}[Z > U_\alpha] = \alpha \Rightarrow$ $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\tilde{\mu} - \mu) > U_\alpha$ ne se produit qu'avec probabilité α.
pour $\alpha = 0.05$, pour $U_\alpha = 1.65$ $\alpha = 0.01$, $U_\alpha = 2.33$

$$\text{Si } \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\tilde{\mu} - \mu_0) \leq U_\alpha \text{ on garde } H_0, \text{ sinon on rejette } H_0.$$

Niveau de signification : α. $\rightarrow$ test unilatéral.