MASTER TDSI
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Master 1
Année 2011/2012
Méthodes déterministes

TD/TP 1: séries de Fourier et équations différentielles

Rappel. Dans ce cours, nous distinguerons différentes convergences de séries de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k$ vers une fonction f

(1) La convergence *presque partout* si pour presque tout x, $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} f_k(x) \to_{N\to+\infty} f(x)$.

(2) La convergence *simple* si pour tout x, $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} f_k(x) \to_{N\to+\infty} f(x)$.

(3) La convergence *uniforme* si

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N} f_k(x) - f(x)\right\|_\infty := \sup_x \left|\sum_{k=-N}^{N} f_k(x) - f(x)\right| \to_{N\to+\infty} 0.$$

(4) La convergence *normale* si

$$\sum_{k=-N}^{N} \sup_x |f_k(x) - f(x)| := \sum_{k=-N}^{N} \|f_k(x) - f(x)\|_\infty \to_{N\to+\infty} 0.$$

(5) La convergence *en norme* L^2 ou encore en *moyenne quadratique* si

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N} f_k(x) - f(x)\right\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega \left|\sum_{k=-N}^{N} f_k(x) - f(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \to_{N\to+\infty} 0.$$

(6) La convergence *en norme* L^1 si

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N} f_k(x) - f(x)\right\|_{L^1(\Omega)} := \int_\Omega \left|\sum_{k=-N}^{N} f_k(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x \to_{N\to+\infty} 0.$$

Rappelons que

convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple $\Rightarrow$ convergence presque partout

Si Ω est borné, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\int_\Omega \left|\sum_{k=-N}^{N} f_k(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega 1\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\sum_{k=-N}^{N} f_k(x) - f(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

donc convergence en norme $L^2 \Rightarrow$ convergence en norme L^1.

Enfin, convergence en norme L^1 implique la convergence presque partout d'une sous-suite (mais pas forcément de la suite elle-même) et le théorème de convergence dominée montre que s'il existe $\varphi \in L^1(\Omega)$ tel que $\left|\sum_{k=-N}^{N} f_k(x)\right| \leq \varphi(x)$ presque partout et si $\sum_{k=-N}^{N} f_k(x)$ converge vers f presque partout, alors on a aussi convergence en norme L^1.

Rappelons aussi que si on veut seulement montrer la convergence d'une série (sans connaître sa limite), on utilise le critère de Cauchy. Ainsi, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k$

(1) convergence *presque partout* si pour presque tout x, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K tel que si $p, q > K$ ou $p, q < -K$ alors $\left|\sum_{k=p}^{q} f_k(x)\right| < \varepsilon$.
(2) convergence *simplement* si pour tout x, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K tel que si $p, q > K$ ou $p, q < -K$ alors $\left|\sum_{k=p}^{q} f_k(x)\right| < \varepsilon$.
(3) convergence *uniformément* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K tel que si $p, q > K$ ou $p, q < -K$ alors $\left\|\sum_{k=p}^{q} f_k(x)\right\|_\infty < \varepsilon$.
(4) convergence *normalement* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K tel que si $p, q > K$ ou $p, q < -K$ alors $\sum_{k=p}^{q} \|f_k(x)\|_\infty < \varepsilon$.
(5) convergence *en norme* L^2 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K tel que si $p, q > K$ ou $p, q < -K$ alors $\left\|\sum_{k=p}^{q} f_k(x)\right\|_2 < \varepsilon$.
(6) La convergence *en norme* L^1 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K tel que si $p, q > K$ ou $p, q < -K$ alors $\left\|\sum_{k=p}^{q} f_k(x)\right\|_1 < \varepsilon$.

Un théorème de Fejer (prochain cours) montre que si $f \in L^p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$ (resp. f continue) alors les moyennes de Césaro de sa série de Fourier convergent dans L^p (resp. uniformément) vers f. Donc si la série de Fourier elle-même (et pas seulement ses moyennes) converge dans L^p (resp. uniformément), la limite est encore f.

Exercice

(1) On suppose que $\sum |c_k(f)|$ converge, quel type de convergence de la série de Fourier de f cela implique-t-il. Que peut-on alors dire sur f ?
(2) Soit f est une fonction 1-périodique de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer $c_k(f)$ en fonction de $c_k(f')$.
(3) En déduire que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors sa série de Fourier converge normalement vers f.
(4) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$. À l'aide de Cauchy-Schwarz et de Parseval, montrer que la série de Fourier converge normalement vers f (utiliser le critère de Cauchy).

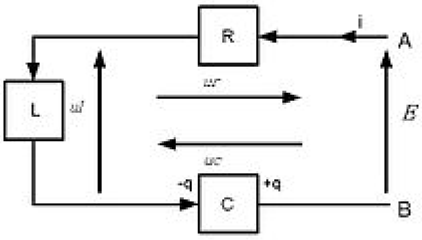
On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle pour $t \in [0,1)$

$$au''(t) + bu'(t) + u(t) = e(t)$$

où e est une fonction sur $(0,1)$ qui vérifie les conditions du théorème de Dirichlet.

Un exemple provient d'un circuit RLC où u est la tension au bord du condensateur, e la tension d'entrée, $a = RL$ et $b = RC$.

(4) Exprimer les coefficients de Fourier de $au''(t) + bu'(t) + u(t)$ en fonction de ceux de u.
(5) En utilisant le fait que les coefficients de Fourier de u sont uniques, exprimer alors les coefficients de Fourier de u en fonction de ceux de e.
(6) En déduire le développement en série de Fourier de u lorsque e est le créneau, $e(t) = 1$ si $t \in [0, 1/2)$ et $e(t) = 0$ pour $t \in [1/2, 1)$.
(7) En reprenant les fonctions du premier TP, nous allons maintenant tracer le graphe de la solution:
   (a) La fonction e est la fonction f du premier TP. On prend 1024 valeurs de e: $f = \{e(0), e(1/1024), \ldots, e(1023/1024)\}$.
   (b) Calculer la FFT F de f. Rappelons que $F(0) \simeq c_0(e)$, $F(1) \simeq c_1(e)$,..., $F(512) \simeq c_{512}(e)$, $F(513) \simeq c_{-511}(e)$,..., $F(1023) = F(513 + 510) \simeq c_{-511+510}(e) = c_{-1}(e)$.
   Par quoi faut-il multiplier f pour avoir une approximation des coefficients de Fourier de u? Effectuer l'opération avec matlab.
   (c) prendre la FFT inverse du résultat et tracer la courbe.
   (d) Recommencer en remplaçant f par $f + b$ où b est un petit bruit aléatoire, `b=(rand(1,1024)-1/2)/100`.
(8) On cherche maintenant une fonction $u(x,t)$ sur $[0,1) \times \mathbb{R}$ qui soit
   – de classe $\mathcal{C}^2$,
   – $u(x, 0) = e(t)$
   – u vérifie l'équation aux dérivées partielles $\partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0$.
   (a) On considère t comme un paramètre et on pose $c_k(t) = c_k\big(u(\cdot,t)\big)$ le k-ième coefficient de Fourier de la fonction $x \to u(x,t)$. Donner une équation différentielle vérifiée par $c_k(t)$.
   (b) Résoudre cette équation différentielle
   (c) Montrer que, pour $t > 0$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(t) e^{2i\pi kx}$ converge uniformément ainsi que ses séries dérivées par rapport à x. En déduire qu'on a bien obtenu une solution.
   (d) Tracer cette solution à l'aide de `matlab` et de la FFT.


R
i
A
L
ul
ur
E
uc
-q
C
+q
B