MASTER THCS
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Master 1
Année 2010/2011
Analyse spectrale des processus

Contrôle continu, 2 févrirer 2011, durée 1h30
Documents et accès internet interdit

Exercice 1. Soient $\{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\{v(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ deux bruits blancs de même variance σ^2 et indépendants les uns des autres (en particulier, ils sont définis sur un même espace de probabilité).

Soit $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ le processus défini par

$$x(n) = u(n) + v(n) - \frac{1}{5}u(n-1) - \frac{1}{2}v(n-1).$$

Montrer que $\{x(n)\}$ est un processus $MA(1)$.

Indication : Écrire $x(n)$ sous la forme $x(n) = w(n) - \theta w(n-1)$ avec $w(n)$ un bruit blanc. On déterminera d'abord θ puis la variance de $w(n)$.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $\{W(n)\}$ un bruit blanc sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *i.e.* une suite d'éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[W(n)] = 0$ et $\mathbb{E}[W(n)W(m)] = \sigma^2\delta_{n,m}$.

Soit $\theta \in]-1, 1[$. On définit

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k W(n-k) \tag{1}$$

(1) Vérifier que cette série converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(2) Montrer que, pour tout $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathbb{E}[|Z|] \leq \mathbb{E}[Z^2]^{1/2}$ et en déduire que la série (1) converge aussi dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(3) Calculer $\mathbb{E}[X(n)]$ et $\mathrm{Cov}\big(X(m), X(n)\big)$. En déduire que le processus $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est SSL.
(4) $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est, par définition, un processus $MA(\infty)$. Montrer que c'est aussi un processus $AR(1)$.
(5) Quelle est la fonction de transfert de ce processus et sa densité spectrale ?

Exercice 3. Veuillez envoyer les codes que vous utilisez à
`philippe.jaming@math.u-bordeaux1.fr`

(1) Utiliser le lemme suivant (cf TP1) pour simuler une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à n degrés de liberté :

$$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} t^{n/2-1} e^{-t} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}$$

(on prendra $n = 20$ —donc $\Gamma(10) = 9!$— pour les simultation et on tracera un histogramme des valeurs).

Lemme 1. *Soit F une fonction $\mathbb{R} \to [0,1]$ croissante, ayant des limites à droite et à gauche en tout point. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Alors $X = F^{-1}(U)$ est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est F i.e. $\mathbb{P}(X \leq \lambda) = F(\lambda)$.*

(2) Effectuer N (à choisir) tirages de $n+1$ variables gaussiennes $X_1, \ldots, X_{n+1}$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Tracer l'histogramme de $S = \sum_{k=1}^{n+1} X_k$ et comparer au résultat précédent.
(3) Quelle résultat pouvez vous conjecturer à partir de cette simulation' ?

Solution de l'exercice 1

Commençons par déterminer $W(n)$: si $X(n) = W(n) - \theta W(n-1)$, $X(n-1) = W(n-1) - \theta W(n-2)$ alors $X(n) + \theta X(n-1) = W(n) - \theta^2 W(n-2)$ puis $X(n)\theta X(n-1) + \theta^2 X(n-2) = W(n) - \theta^3 W(n-3)$,... et on définit

$$W(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k X(n-k).$$

Si $|\theta| < 1$, cette série converge dans L^2 donc aussi dans L^1 (car elle est normalement convergente puisque $\theta < 1$, voir l'exercice suivant), il reste à voir que c'est bien un bruit blanc: $X(n)$ est de moyenne nulle, donc $W(n)$ aussi (interversion somme-espérance, justifiée par la convergence dans L^1). On veut que W soit un bruit blanc, donc que $\mathbb{E}[W(n)^2]$ ne dépende pas de n et que $\mathbb{E}[W(n)W(m)] = 0$ si $n \neq m$.

Calculons d'abord $\mathbb{E}[X(n)X(m)]$. En utilisant l'indépendance des $\{u(n)\}$ et $\{v(n)\}$ *i.e.* leur orthogonalité, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(n)^2] &= \mathbb{E}[u(n)^2] + \mathbb{E}[v(n)^2] + \frac{1}{25}\mathbb{E}[u(n-1)^2] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[v(n-1)^2] \\
&\quad +2\mathbb{E}[u(n)v(n)] - \mathbb{E}[u(n)u(n-1)] - \mathbb{E}[u(n)v(n-1)] - \frac{2}{5}\mathbb{E}[u(n)v(n-1)] \\
&\quad -\frac{2}{5}\mathbb{E}[v(n)v(n-1)] + \frac{1}{5}\mathbb{E}[u(n-1)v(n-1)] \\
&= \mathbb{E}[u(n)^2] + \mathbb{E}[v(n)^2] + \frac{1}{25}\mathbb{E}[u(n-1)^2] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[v(n-1)^2] \\
&= \frac{229}{200}\sigma^2
\end{aligned}$$

puis

$$\mathbb{E}[X(n)X(n-1)] = -\frac{1}{2}\mathbb{E}[u(n-1)^2] - \frac{1}{5}\mathbb{E}[v(n-1)^2] = -\frac{7}{10}\sigma^2$$

et $\mathbb{E}[X(n)X(n-k)] = 0$ si $|k| \geq 2$.

Mais alors, en utilisant la convergence dans L^2 on peut intervertir sommation et produit scalaire: si $m \geq n+1$

$$\begin{aligned}
\langle W(n), W(m)\rangle &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \theta^{k+l}\langle X(n-k), X(m-l)\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=m-n+k-1\geq 0}^{l=m-n+k+1} \theta^{k+l}\langle X(n-k), X(m-l)\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \theta^{m-n+2k-1}\big(\theta\langle X(n-k), X(n-k+1)\rangle + \theta\langle X(n-k), X(n-k)\rangle \\
&\qquad +\theta^2\langle X(n-k), X(n-k-1)\rangle\big) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \theta^{m-n+2k}\big(\mathbb{E}[X(n-k)X(n-k+1)] + \theta\mathbb{E}[X(n-k)^2] + \theta^2\mathbb{E}[X(n-k)X(n-k-1)]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \theta^{m-n+2k}\left(-\frac{7}{14} + \frac{229}{200}\theta - \frac{7}{14}\theta^2\right)\sigma^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

en choisissant θ l'unique solution de l'équation

$$-\frac{7}{14} + \frac{229}{200}\theta - \frac{7}{14}\theta^2 = 0$$

qui soit comrpise entre -1 et 1 (c'est la racine positive).

Si $m=n$ alors $l=m-n-k-1=k-1$ et négatif si $k=0$, donc

$$\begin{aligned}\langle W(n),W(n)\rangle &= \sum_{l=0}^{l=1}\theta^l\langle X(n),X(n-l)\rangle \\ & \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=k-1\geq 0}^{l=k+1}\theta^{k+l}\langle X(n-k),X(n-l)\rangle \\ &= \mathbb{E}[X(n)^2]+\theta\mathbb{E}[X(n)X(n-1)]=...\end{aligned}$$

et cette quantité ne dépend pas de n. Ainsi $W(n)$ est bien un bruit blanc et il est évident que $X(n)=W(n)-\theta W(n-1)$.

Notez qu'on peut déterminer θ et la variance de ce bruit sans le connaître, mais le raisonnement précédent est nécessaire pour voir qu'on a bien un bruit blanc:

Si $X(n)$ est bien $MA(1)$, $X(n)=W(n)-\theta W(n-1)$ avec $W(n)$ un bruit blanc de variance Σ^2, alors

$$\mathbb{E}[X(n)^2]=\langle W(n)-\theta W(n-1),W(n)-\theta W(n-1)\rangle=\langle W(n),W(n)\rangle+\theta^2\langle W(n-1),W(n-1)\rangle$$

puisque $\langle W(n),W(k)\rangle=\delta_{n-k}$, donc $\mathbb{E}[X(n)^2]=(1+\theta^2)\Sigma^2$. Ensuite

$$\mathbb{E}[X(n)X(n-1)]=\langle W(n)-\theta W(n-1),W(n-1)-\theta W(n-2)\rangle=-\theta\langle W(n-1),W(n-1)\rangle=-\theta\Sigma^2.$$

En utilisant l'indépendance des $\{u(n)\}$ et $\{v(n)\}$ *i.e.* leur orthogonalité, on trouve

$$\mathbb{E}[X(n)^2]=\mathbb{E}[u(n)^2]+\mathbb{E}[v(n)^2]+\frac{1}{25}\mathbb{E}[u(n-1)^2]+\frac{1}{4}\mathbb{E}[v(n-1)^2]=\frac{229}{200}\sigma^2$$

et, avec $X(n-1)=u(n-1)+v(n-1)-1/2u(n-2)-1/5v(n-2)$,

$$\mathbb{E}[X(n)X(n-1)]=-\frac{1}{2}\mathbb{E}[u(n-1)^2]-\frac{1}{5}\mathbb{E}[v(n-1)^2]=-\frac{7}{10}\sigma^2.$$

On a donc le système

$$\begin{cases}-\theta\Sigma^2 &= -\frac{7}{10}\sigma^2\\ (1+\theta^2)\Sigma^2 &= \frac{229}{200}\sigma^2\end{cases}$$

La première équation montre que $\theta>0$ et, en divisant les deux, on obtient $\frac{\theta}{1+\theta^2}=\frac{140}{229}$ d'où

$$\theta^2-\frac{229}{140}\theta+1=0$$

et $\theta=-\frac{229}{140}+\sqrt{\frac{229^2}{140^2}+4}$ (l'autre racine est positive, un calcul numérique vous montre aussi que cette racine est plus petite que 1). Ensuite $\Sigma^2=\frac{7}{10\theta}\sigma^2$.

Reste à voir que W est bien un bruit blanc.

Solution de l'exercice 2

1. Comme $W(n)$ est un bruit blanc $\|W(n)\|_{L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})}=\sigma^2$. La série $\sum_{k=0}^{+\infty}\theta^kW(k)$ est normalement convergente dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left\|\theta^kW(n-k)\right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})}=\sigma^2\sum_{k=0}^{+\infty}|\theta|^k=\frac{\sigma^2}{1-|\theta|}<+\infty$$

puisque $|\theta|<1$. Une série normalement convergente est convergente.

Alternative (un peu plus claire): on vérifie qu'elle est de Cauchy

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=p}^{q}\theta^k W(n-k)\right\|_2^2 &= \left\langle \sum_{k=p}^{q}\theta^k W(n-k), \sum_{\ell=p}^{q}\theta^\ell W(n-\ell)\right\rangle \\ &= \sum_{k=p}^{q}\sum_{\ell=p}^{q}\theta^{k+\ell}\langle W(n-k), W(n-\ell)\rangle \\ &= \sigma^2\sum_{k=p}^{q}\theta^{2k}\end{aligned}$$

par orthogonalité des $W(k)$. Comme $|\theta|<1$, $\sum\theta^k$ converge, le critère de Cauchy est donc vérifié.

2. On applique Cauchy-Schwarz $\mathbb{E}[|Z|] = \mathbb{E}[1.|Z|] \leq \mathbb{E}[1]^{1/2}\mathbb{E}[|Z|^2]^{1/2} = \mathbb{E}[|Z|^2]^{1/2}$ puisque $\mathbb{E}[1]=1$.

Par suite, une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ est aussi de Cauchy dans $L^1(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. (Attention, ceci n'est vrai que pour les mesures finies). Donc la série $\sum\theta^k W(k)$ converge aussi dans $L^1(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

3. Vu que la série converge dans L^1, on peut intervertir intégration et sommation, donc

$$\mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k W(n-k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\mathbb{E}[W(n-k)] = 0.$$

Vu que la série converge dans L^2, on peut intervertir sommation et produit scalaire. Ainsi, si $m \geq n$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\big(X(n),X(m)\big) &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty}\theta^k W(n-k), \sum_{\ell=0}^{\infty}\theta^\ell W(m-\ell)\right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\theta^{k+\ell}\langle W(n-k), W(m-\ell)\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\theta^{k+\ell}\sigma^2\delta_{n-k,m-\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k+m-n+k}\sigma^2 \\ &= \frac{\theta^{m-n}}{1-\theta^2}\sigma^2.\end{aligned}$$

On a utilisé la condition $m \geq n$ pour dire que $\ell = m-n+k \geq 0$. Si $m \leq n$, il faudrait modifier les dernières lignes comme suit:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\big(X(n),X(m)\big) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\theta^{k+\ell}\sigma^2\delta_{n-k,m-\ell} \\ &= \sum_{k=n-m}^{\infty}\theta^{k+m-n+k}\sigma^2 \\ &= \theta^{m-n}\frac{\theta^{2(n-m)}}{1-\theta^2}\sigma^2 = \frac{\theta^{n-m}}{1-\theta^2}\sigma^2.\end{aligned}$$

Évidemment, on peut se passe de ce calcul en invoquant la symétrie $\mathrm{Cov}\big(X(n),X(m)\big) = \mathrm{Cov}\big(X(m),X(n)\big)$. Au final, on obtient

$$\mathrm{Cov}\big(X(n),X(m)\big)\frac{\theta^{|n-m|}}{1-\theta^2}\sigma^2.$$

On a bien un processus SSL puisque la moyenne est constante et la covariance est une fonction de $|n-m|$.

4. Il s'agît de trouver une relation de la forme $X(n)+aX(n-1)=Z(n)$ avec $Z(n)$ un bruit blanc. Il faut donc écrire

$$\begin{array}{rcccccccccc} X(n) & = & W(n) & + & \theta W(n-1) & + & \theta^2 W(n-2) & + & \theta^3 W(n-3) & + & \cdots \\ X(n-1) & = & W(n-1) & + & \theta W(n-2) & + & \theta^2 W(n-3) & + & \cdots & & \end{array}$$

d'où on déduit imméiatement que $X(n)=W(n)+\theta X(n-1)$.

5. La fonction de transfert est donnée par $h(k)=\theta^{|k|}$: $X(n)=W*h(n)$. Sa densité spectrale est donnée par

$$\begin{aligned}
\widehat{R(\omega)} &= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\theta^{|k|} \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\theta^k e^{-ik\omega}+\sum_{k=1}^{\infty}\theta^k e^{ik\omega}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(1+2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\theta^k e^{ik\omega}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(1+2\mathrm{Re}\,\frac{\theta e^{i\omega}}{1-\theta e^{i\omega}}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(1+2\mathrm{Re}\,\frac{\theta e^{i\omega}(1-\theta e^{-i\omega})}{(1-\theta e^{i\omega})(1-\theta e^{-i\omega})}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(1+2\mathrm{Re}\,\frac{\theta e^{i\omega}-\theta^2)}{1+\theta^2-2\theta\cos\omega}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(1+\frac{2\theta\cos\omega-2\theta^2)}{1+\theta^2-2\theta\cos\omega}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{1+\theta^2-2\theta\cos\omega}.
\end{aligned}$$