Groupes résolubles

12 mars 2010

1 Groupes résolubles

Soit G un groupe.

- Pour $x, y \in G$, on définit le *commutateur* $[x, y] := xyxy^{-1}$.
- On appelle *groupe dérivé* de G, et on note $D(G)$, le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[x, y]$, pour $x, y \in G$.
- On pose $D^0(G) = D(G)$ et $D^{i+1}(G) = D(D^i(G))$ pour tout $i \geq 0$.
- On dit que G est *résoluble* s'il existe $r \geq 0$ tel que $D^r(G) = \{1\}$.

Soient H un sous-groupe de G et N un sous-groupe distingué de G.

1. Montrer que si G est abélien, alors G est résoluble.
2. Montrer que si H est résoluble, alors H et G/N le sont aussi.
3. Réciproquement, montrer que si N et G/N sont résolubles, alors G l'est aussi.

2 $\mathcal{S}_n$ est résoluble pour $n \leq 4$

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est résoluble pour $n \leq 3$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_4$ est résoluble. Indication : soit V_4 le sous groupe formé de l'identité et des trois permutations $(12)(34)$, $(13)(24)$ et $(14)(23)$. Vérifier que V_4 est un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$ et que $\mathcal{A}_4 / V_4 \simeq \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}$. Conclure.

3 $\mathcal{S}_n$ n'est pas résoluble pour $n \geq 5$

1. Soit $n \geq 3$. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les produits de deux transpositions.
2. Soit $n \geq 3$. Montrer que tout 3-cycle appartient à $\mathcal{A}_n$. Puis, en utilisant la question précédente, montrer que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.
3. Soit $n \geq 5$. Soient a, b, c, d, e cinq éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Déterminer la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de la permutation
$$(adc)(bec)(acd)(bce).$$
En déduire que $D(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$.
4. Montrer que $\mathcal{S}_n$ n'est pas résoluble pour $n \geq 5$.