Devoir à la maison n^{o}2.

Pour la semaine du 11 avril 2011.

Les exercices sont indépendants. Chaque réponse devra être justifiée.

Exercice 1 Formule de Burnside

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note $k \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'orbites de X sous l'action de G. D'autre part, pour tout $g \in G$, on note X^g l'ensemble des points fixes de X sous l'action de g :

$$X^g := \{x \in X \mid g.x = x\}.$$

Le but de cet exercice est d'établir la formule de Burnside :

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Pour cela, on considère l'ensemble

$$U := \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}.$$

1. Montrer que $|U| = \sum_{g \in G} |X^g|$.
2. Montrer que $|U| = k|G|$.
3. Conclure.

Exercice 2 Théorèmes de Sylow

Soient G un groupe fini et p un nombre premier divisant l'ordre de G. Soit p^n la plus grande puissance de p qui divise l'ordre de G.

1. *Dans cette question*, on suppose G abélien. La loi est alors notée $+$.
   a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $mG = \{0\}$, c'est-à-dire, $mg = 0$ pour tout $g \in G$. Si H un sous-groupe de G, montrer que $mH = \{0\}$ et $m(G/H) = \{\overline{0}\}$. En déduire que $|G|$ divise une puissance de m (Indication : raisonner par récurrence sur $|G|$).
   b) En considérant
   $$\text{ppcm}\{\text{ordre de } g \mid g \in G\},$$
   montrer qu'il existe $g \in G$ d'ordre divisible par p. En déduire qu'il existe $g \in G$ d'ordre p.
2. Le but de cette question est de montrer que G possède un sous-groupe d'ordre p^n. Pour cela, on raisonne par récurrence sur l'ordre de $|G|$, et on suppose donc que le résultat est vrai pour tout groupe fini d'ordre $< |G|$.
   a) Soit $Z(G)$ le centre de G. Montrer qu'il existe des sous-groupes $H_1, \ldots, H_r$ de G tels que
   $$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|H_i|}.$$
   b) Premier cas : p ne divise pas $|Z(G)|$. Montrer qu'alors il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que p^n divise $|H_i|$. Puis conclure dans ce cas.
   c) Second cas : p divise $|Z(G)|$. Montrer qu'alors il existe $x \in Z(G)$ d'ordre p. Montrer que le sous-groupe $< x >$ de G engendré par x est distingué. Montrer que $G/ < x >$ possède un sous-groupe d'ordre p^{n-1}. Conclure dans ce cas.
3. Soient P et Q des sous-groupes de G d'ordre p^n. Le but de cette question est de montrer que P et Q sont conjugués, c'est-à-dire, qu'il existe $g \in G$ tel que $g^{-1}Qg = P$.

a) Soit X l'ensemble des classes à gauche de G relativement à P :

$$X := \{gP \mid g \in G\}.$$

Montrer que l'application

$$\begin{cases} Q \times X & \longrightarrow & X \\ (q, gP) & \longmapsto & qgP \end{cases}.$$

est une action du groupe Q sur l'ensemble X. On note X^Q l'ensemble des points fixes sous cette action, c'est-à-dire :

$$X^Q := \{gP \in X \mid qgP = gP \text{ pour tout } q \in Q\}.$$

b) A l'aide de la formule des classes pour cette action, montrer que X^Q est non-vide. Puis conclure.

Exercice 3 Résolubilité de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \leq 4$

On dit qu'un groupe G est *résoluble* s'il existe une suite finie de sous-groupes

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_r \supseteq G_{r+1} = \{1\}$$

telle que

– G_{i+1} est distingué dans G_i pour tout $i = 0, \ldots, r$;

– le groupe quotient G_i/G_{i+1} est abélien.

1. Montrer que les groupes $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont résolubles.
2. Soient $l, n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq l \leq n$. Soient $a_1, \ldots, a_l$ des éléments distincts de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Établir la formule
$$\sigma(a_1, \ldots, a_l)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_l)).$$
3. Soit C le sous-ensemble de $\mathfrak{S}_3$ formé des cycles de longueur 3 et de l'identité. Montrer que C est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_3$. Quel est le cardinal du quotient G/C ? En déduire que $\mathfrak{S}_3$ est résoluble.
4. Soit V_4 le sous-ensemble de $\mathfrak{S}_4$ formé de l'identité et des trois permutations (12)(34), (13)(24) et (14)(23). Montrer que V_4 est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_4$. Montrer d'autre part que V_4 est contenu dans A_4. En déduire que $\mathfrak{S}_4$ est résoluble.
