Feuille de TD n°1

Ensembles

Dans les quatre premiers exercices, on considère trois parties A, B et C d'un ensemble E.

Exercice 1
On suppose que $A \cup B = A \cap C$ et $C \cup A = C \cap B$. Montrer que $A = B = C$.

Exercice 2

1. Montrer les propriétés suivantes :
   a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. On considère les parties X et Y de E définies par

$$X := (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \qquad Y := (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A).$$

   Montrer que $X = Y$.

Exercice 3
Montrer l'équivalence suivante : $(A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C) \Longleftrightarrow B \subset C$.

Exercice 4
Donner les relations entre les ensembles suivants :

1. $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$,
2. $\mathcal{P}(A \cap B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
3. $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Exercice 5
Soit E un ensemble fini à n éléments, on définit $\mathcal{E} = \big\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2\,,\, A \cup B = E\big\}$.

1. a) Rappeler le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
   b) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal k. Calculer le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{E}_A = \{B \in \mathcal{P}(E)\,,\, A \cup B = E\}\,.$$

   c) En déduire le cardinal de $\mathcal{E}$.
2. Retrouver le cardinal de $\mathcal{E}$ en utilisant le fait que si deux parties A, B de E vérifient $A \cup B = E$, alors tout élément de E est ou bien dans $A \setminus B$, ou bien dans $B \setminus A$, ou bien dans $A \cap B$.

Exercice 6 Formule du crible
Soient n un entier naturel, $n \geqslant 4$ et $A_1, \ldots, A_n$ n parties finies d'un ensemble X.

1. a) Calculer $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ en fonction des cardinaux des A_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$ et des cardinaux de leurs intersections.
   b) Calculer $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ en fonction des cardinaux des A_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$ et des cardinaux de leurs intersections.
   c) Suggérer une formule pour $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$.
2. On cherche à prouver cette formule. Pour ce faire, on pose $E = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   a) Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Développer complètement $p = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$.
   b) En considérant la somme $\displaystyle\sum_{x \in E} (1 - f_1(x))(1 - f_2(x)) \cdots (1 - f_n(x))$, démontrer la formule trouvée à la question **1.c**.

Applications

Exercice 7 Partie stable par une application

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On note $f^0 = Id_E$ et pour un entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Pour $A \subseteq E$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = f^n(A)$ et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

1. Montrer que $f(B) \subseteq B$.
2. Montrer que B est la plus petite partie de E au sens de l'inclusion qui est stable par f et contenant A.

Exercice 8

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ f(x) = y$,
2. $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ f(x) = y$,
3. $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ f(x) = y$,
4. $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ f(x) = y$,
5. $\forall y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) = y$,
6. $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$,
7. $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) = y$,
8. $\exists y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.

Exercice 9

Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties de F.

1. Montrer que $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$ et $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.
2. Montrer que $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ et $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.
3. Montrer que l'inclusion ci-dessus peut être stricte.

Exercice 10

Soient X et Y des ensembles. Soient alors $A \in \mathcal{P}(X)$, $B \in \mathcal{P}(Y)$ et $f : X \to Y$ une application.

1. Quels liens y a-t-il entre $f\left(f^{-1}(B)\right)$ et B ? Expliciter un exemple où on n'a pas égalité. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que l'égalité soit vérifiée.
2. Quels liens y a-t-il entre $f^{-1}(f(A))$ et A ? Expliciter un exemple où on n'a pas égalité. La condition « f est injective » est-elle équivalente au cas d'égalité ?
3. Simplifier $f\left(f^{-1}(f(A))\right)$ et $f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(B)\right)\right)$.

Exercice 11 Factorisation d'une application

Soient E, F et G des ensembles.

1. Soient $f : F \longrightarrow E$ et $g : G \longrightarrow E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \longrightarrow F$ tel que $f \circ h = g$ si et seulement si $g(G) \subseteq f(F)$. À quelle condition h est-elle unique ?
2. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \longrightarrow G$ telle que $h \circ f = g$ si et seulement si

$$\forall x, y \in E,\ (f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y)).$$

   À quelle condition h est-elle unique ?