Feuille de TD n°4

Groupes (suite)

Exercice 1 (DS 2010)

Soit G un groupe cyclique engendré par un élément g. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G.

1. Montrer que l'application $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{End}(G) & \longrightarrow & G \\ f & \longmapsto & f(g) \end{array} \right.$ est une bijection.
2. Soit $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.
   a) Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe.
   b) Soit $f \in \mathrm{End}(G)$. Montrer que $f \in \mathrm{Aut}(G)$ si et seulement si $\psi(f)$ est un générateur de G.
3. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

Exercice 2

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On définit le centre de G comme $Z(G) = \{a \in G, \forall x \in G, ax = xa\}$.

1. Montrer que $(Z(G), \cdot)$ est un groupe abélien.
2. On définit une application i de $(G, \cdot)$ dans $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ de la manière suivante : si $a \in G$, alors

$$i(a) : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array} \right. .$$

   Montrer que i est bien définie, que c'est un morphisme de groupes. L'image de i notée $\mathrm{Int}(G)$ est le groupe des automorphismes intérieurs de G.
3. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
4. Trouver une réalisation pratique du quotient $(G/Z(G), \cdot)$.
5. Ce groupe quotient est-il toujours abélien ?
6. Soit $(H, \cdot)$ un sous-groupe de $(G, \cdot)$ contenu dans $(Z(G), \cdot)$. Montrer que si le groupe quotient $(G/H, \cdot)$ est monogène, alors $(G, \cdot)$ est abélien. On pourra par exemple prouver qu'un représentant d'un générateur du groupe quotient est dans le centre de $(G, \cdot)$.

Exercice 3

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour g_1 et g_2 appartenant à G, on définit leur commutateur par

$$[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}.$$

Soit $(D(G), \cdot)$ le groupe endendré par les commutateurs de G. On l'appelle groupe dérivé de G.

1. Montrer que $(D(G), \cdot)$ est un sous-groupe distingué de $(G, \cdot)$.
2. Soit $(H, \cdot)$ un sous-groupe de $(G, \cdot)$. Montrer que

$$(H \text{ est distingué dans } G \text{ et } G/H \text{ est abélien}) \Longleftrightarrow (H \supseteq D(G)) .$$

Exercice 4

Soient G et H des groupes, et $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que si L est un sous-groupe distingué de H, alors $f^{-1}(L)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que si K est un sous-groupe distingué de G et f est surjective, alors $f(K)$ est un sous-groupe distingué de H. Qu'en est-il si f n'est pas surjective ?
3. Soit a un élément d'ordre 2 de G. Montrer que $\langle a \rangle$ est un sous-groupe distingué de G si et seulement si a est dans le centre de G.
4. En déduire que $\langle \tau_{1,2} \rangle$ n'est pas un sous-groupe distingué de $(\mathfrak{S}_3, \circ)$.

Exercice 5
Soit p un nombre premier. Montrer que la multiplication dans $\mathbb{Z}$ induit une structure de groupe sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}$.

Exercice 6 nombres de Mersenne.
Soit n un entier supérieur à 3.

1. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n l'est aussi.
2. Supposons n premier. Soit p un diviseur premier de $2^n - 1$. Prouver que $2n$ divise $p - 1$.
   Indication : on pourra considérer l'ordre de $\overline{2}$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$.
3. L'entier n peut-il être premier sans que $2^n - 1$ le soit ?

Exercice 7 groupe des homomorphismes.
Soient $(G, \cdot)$ un groupe et $(A, +)$ un groupe abélien. On note $\mathrm{Hom}\,(G, A)$ l'ensemble des homomorphismes de G dans A et A^G le groupe (abélien) des applications de G dans A.

1. Montrer que $\mathrm{Hom}\,(G, A)$ est un sous-groupe de A^G.
2. Soit n un entier supérieur à 1. Établir un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A)$ et $\{x \in A,\ nx = 0\}$.
3. Soient n et m deux entiers supérieurs à 1. Déterminer le groupe $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

Exercice 8 lemme de Frobenius.
Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G d'indice m. On pose $X = G/H \setminus \{H\}$.

1. Soit $h \in H$. Construire une bijection $f(h) : X \longrightarrow X$ qui à xH associe hxH pour tout $x \in G \setminus H$.
2. Vérifier que $f : H \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$ est un morphisme de groupes.
3. Montrer que tout diviseur premier de $\#\,(Im\, f)$ est inférieur à $m - 1$.
4. Supposons que tout diviseur premier de $\#H$ est supérieur à m. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 9
Soient G un groupe et N un sous-groupe de G d'indice 2. Soit H un sous-groupe simple de G d'ordre supérieur à 3.

1. Montrer que N est un sous-groupe distingué de G.
2. En déduire que $H \cap N$ est un sous-groupe distingué de G.
3. Prouver que $H \subseteq N$.

Exercice 10 normalisateur.
Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On note N l'ensemble des $g \in G$ tels que $gHg^{-1} = H$.

1. Vérifier que N est un sous-groupe de G contenant H et que H est distingué dans N.
2. Soit K un sous-groupe de G contenant H. Montrer que $K \subseteq N$ si et seulement si H est distingué dans K.

Exercice 11
Soient $d \in \mathbb{N}^\star$ et G un groupe fini. On désigne par X l'ensemble des $g \in G$ tels que $g^d = 1$. Soit H un sous-groupe distingué de G.

1. La partie X est-elle un sous-groupe de G ?
2. Montrer que si $[G : H]$ et d sont premiers entre eux, alors $X \subseteq H$.