Feuille de TD n°5

Groupe symétrique

Si cela n'est pas précisé, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 1

Donner la liste des éléments du groupe $\mathfrak{S}_3$. Écrire la table de la loi du groupe. Donner la liste des sous-groupes.

Exercice 2

1. Quel est l'ordre d'une transposition ?
2. La décomposition d'une permutation en produit de transpositions est-elle unique ?
3. Écrire explicitement la décomposition d'un cycle en produit de transpositions.
4. Montrer que deux cycles de même longueur sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$.
5. Montrer que deux cycles à supports disjoints commutent.
6. Montrer que le centre $Z(\mathfrak{S}_n)$ de $\mathfrak{S}_n$ est $\{id\}$ si $n \neq 2$.

Exercice 3

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions.
3. Calculer σ^{201}.
4. Calculer l'ordre de σ.
5. Décrire une méthode générale permettant de calculer l'ordre d'une permutation.

Exercice 4 signature.

On définit une application ε appelée *signature* de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$ par

$$\varepsilon(\sigma) := (-1)^{\#\{(i,j)\in\{1,\ldots,n\},\, i<j,\, \sigma(i)>\sigma(j)\}}$$

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des paires d'éléments compris entre 1 et n.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, montrer que $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$. En déduire que $\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\}\in\mathcal{P}} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.
2. Montrer que ε est un morphisme de groupes.

Exercice 5 groupe alterné.

1. Calculer la signature d'une transposition.
2. Montrer que les permutations (im)paires sont exactement les produits d'un nombre (im)pair de transpositions.
3. Calculer la signature d'un cycle.
4. Calculer la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$.
5. Montrer que $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma) = +1\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. Préciser l'ordre de $\mathcal{A}_n$.
6. Décrire explicitement le groupe $\mathcal{A}_3$.

Exercice 6

Montrer que les seuls homomorphismes de groupes entre $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ et $(\mathbb{C}^\star, \times)$ sont le morphisme trivial et la signature.

Exercice 7 un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$

1. Montrer que les permutations suivantes sont des éléments de $\mathcal{A}_4$:

$$\sigma_1 = (12)(34), \qquad \sigma_2 = (13)(24), \qquad \sigma_3 = (14)(23).$$

2. Déterminer le groupe G engendré par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, donner sa table de multiplication.
3. Soient $\sigma \in G \setminus \{id\}$ et $\tau \in \mathfrak{S}_4$. Montrer que $\tau\sigma\tau^{-1}$ n'a pas de point fixe.
4. Montrer que $\tau\sigma\tau^{-1}$ est d'ordre 2.
5. En déduire que G est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 8

On définit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \sigma \cdot X = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que cela définit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. On note $(X_1, \ldots, X_n)$ les colonnes de la matrice identité d'ordre n. Étant donné $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit la matrice $P(\sigma)$ dont les colonnes sont $(\sigma \cdot X_1, \ldots, \sigma \cdot X_n)$. Montrer que cela définit un morphisme de groupes $P : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition. Montrer que $\det P(\tau) = -1$. En déduire que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\det P(\tau) = \varepsilon(\sigma)$.

Exercice 9

Un groupe G d'ordre 32 agit sur un ensemble X à 55 éléments. Cette action possède 5 orbites. Donner la liste des cardinaux des orbites possibles.

Exercice 10

On fait agir le groupe $(\mathbb{Z}/22\mathbb{Z})^\star$ par multiplication sur l'ensemble $\mathbb{Z}/22\mathbb{Z}$, c'est-à-dire par l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/22\mathbb{Z})^\star \times \mathbb{Z}/22\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/22\mathbb{Z} \\ (a, x) & \longmapsto & a \cdot x \end{array} \right. .$$

Décrire les orbites de cette action.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $G := < \sigma >$ le sous-groupe engendré par σ. On fait agir G sur l'ensemble $X := \{1, \ldots, n\}$ par
$$\forall g \in G,\ \forall x \in X,\ g \cdot x := g(x).$$
   a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une action de groupe.
   b) Décrire les orbites de cette action.
2. On fait agir le groupe $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même par
$$\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma \cdot \tau := \sigma\tau\sigma^{-1}.$$
   a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une action de groupe. Les orbites de cette action sont appelées les *classes de conjugaison* de $\mathfrak{S}_n$.
   b) Décrire la classe de conjugaison d'un cycle.
3. Décrire la classe de conjugaison d'une permutation quelconque.