Feuille de TD n°6

Exercice 1 lemme de Cauchy

Soient G un groupe fini et p un nombre premier tel que p divise $\#G$. Notons X l'ensemble des applications $\phi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to G$ telles que $\phi(\overline{1}) \cdots \phi(\overline{p}) = 1$.

En faisant agir le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X, montrer qu'il existe un élément de G d'ordre p.

Exercice 2

Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On suppose H d'ordre 2. Montrer que H est contenu dans le centre de G.

Exercice 3

Soit G un groupe fini d'ordre pair. En faisant agir le groupe $\{-1, 1\}$ sur G, montrer qu'il existe un élément de G d'ordre 2.

Exercice 4

Soit m un entier naturel impair. Soit G un groupe d'ordre $2m$. On choisit un élément $g \in G$ d'ordre 2.

1. Montrer que l'application $\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gx \end{array} \right.$ est une permutation impaire de G.
2. En déduire que G contient un sous-groupe d'indice 2.

Exercice 5 formule de Burnside.

Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E de cardinal $n \geqslant 2$. On note k le nombre d'orbites de E sous l'action de G. Pour tout $g \in G$, on note $f(g)$ le nombre de points fixes de g.

1. En considérant le cardinal de l'ensemble $\{(g, x) \in G \times E,\ g \cdot x = x\}$, montrer la formule
$$k = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f(g).$$
2. En faisant agir G sur E^2, montrer l'inégalité
$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f(g)^2 \geqslant 2.$$

Exercice 6

Soit n un entier supérieur à 4. Montrer que le centre de $\mathcal{A}_n$ est trivial.

Exercice 7

Soit G un groupe.

1. On note Z le centre de G. On suppose que le groupe G/Z est monogène. Montrer que G est abélien.
2. Soit p un nombre premier. On suppose G d'ordre p^2. Montrer que G est abélien.