Feuille de TD n^{o}1

1 Résolution de systèmes

Exercice 1

Résoudre pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$,

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & az & = & 0 \\ 3x & - & y & & & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$ en fonction du réel a,

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$,

4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & & & + & z & = & -1 \\ x & + & 4y & + & 3z & = & b \end{array}\right.$, en fonction du réel b.

2 Familles de vecteurs

Exercice 2

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les familles de vecteurs $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{G} = \{f_1, f_2, f_3\}$ où les vecteurs sont donnés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par

$$e_1 = (1, 2, -1),\ e_2 = (1, 4, 5),\ e_3 = (1, 3, 1) \quad \text{et} \quad f_1 = (1, 0, 2),\ f_2 = (3, -2, 1),\ f_3 = (-1, 2, 3).$$

1. a) Quel est le rang de $\mathcal{F}$?
   b) Trouver les sous-familles de $\mathcal{F}$ qui sont libres, génératrices, des bases.
   c) Donner une équation décrivant l'espace vectoriel engendré par e_1 et e_2.
2. Mêmes questions pour $\mathcal{G}$.

Exercice 3

1. a) Prouver que la famille engendrée par $f_1 = (2, 0, -1, 1)$ et $f_2 = (1, 2, 0, 3)$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.
   b) Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.
   c) En déduire un système d'équations décrivant $< f_1, f_2 >$.
2. Mêmes questions pour $f_1 = (4, 2, 1, -1)$ et $f_2 = (2, 1, 0, 1)$.

Exercice 4

1. On considère les hyperlans de $\mathbb{R}^4$ suivants : $F_1 : 3x+y-2z+t = 0$ et $F_2 : x-y+3z-t = 0$.
   a) Quel est la dimension de $F_1 \cap F_2$?
   b) Trouver une base de $F_1 \cap F_2$.
2. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par les équations suivantes : F : $2x - 3y - z = 0$ et G : $\left\{\begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \end{array}\right.$.
   a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

b) Donner une base de F et une base de G.

Exercice 5

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ décrit par les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 2t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ 4x & - & 7y & - & 3z & + & 5t & = & 0 \end{array}\right. .$$

1. Est-ce un système d'équations linéaires minimal décrivant F ? Si ce n'est pas le cas, en trouver un.
2. Donner une base de F.

3 Valeurs propres et diagonalisation

Exercice 6

Donner les valeurs propres, les vecteurs propres associés et lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
2. $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p \circ p = p$.
   a) Quelles sont les valeurs propres possibles pour p ?
   b) p est-il diagonalisable ?
2. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $s \circ s = Id_E$.
   a) Quelles sont les valeurs propres possibles pour s ?
   b) s est-il diagonalisable ?