Feuille de TD n^{o}2

4 Familles de vecteurs (suite)

Exercice 8

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $a = (1, 2, 1)$, $b = (1, 3, 2)$, $c = (1, 1, 0)$, $d = (3, 8, 5)$. On note $F =< a, b >$ et $G =< c, d >$. Comparer F et G.

Exercice 9

Soient $f_1 = (1, 2, -2, 1)$ et $f_2 = (0, 2, 1, -2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1. Donner la dimension de $< f_1, f_2 >$.
2. Compléter $\{f_1, f_2\}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. En déduire un système d'équations décrivant $< f_1, f_2 >$.

5 Diagonalisation et applications

Exercice 10

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -8 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -6 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
   b) Calculer les sous-espaces propres associés.
2. a) Montrer que les sous-espaces propres de A sont aussi sous-espaces propres de B.
   b) En déduire que B est diagonalisable.
3. Montrer sans calcul supplémentaire que $AB = BA$.

Exercice 11 Matrices circulantes

Étant donné quatre nombres complexes c_0, c_1, c_2 et c_2, on note

$$C(c_0, c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix}.$$

On pose $J = C(0, 1, 0, 0)$.

1. Calculer les puissances de J.
2. En déduire que J est diagonalisable. Donner les valeurs propres de J.
3. Écrire $C(c_0, c_1, c_2, c_3)$ en fonction de c_0, c_1, c_2, c_3 et J.
4. En déduire que pour tout $(c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^4$, $C(c_0, c_1, c_2, c_3)$ est diagonalisable dans une base commune qu'on précisera.
5. Soit $(c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^4$, donner les valeurs propres de $C(c_0, c_1, c_2, c_3)$ et en déduire la valeur de $\det C(c_0, c_1, c_2, c_3)$.

Exercice 12 Diagonalisation simultanée

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et soit V un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que la restriction de u à V est diagonalisable.

2. Soit $A \subseteq \mathcal{L}(E)$ une famille d'endomorphisme diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer que les éléments de A admettent une base commune de diagonalisation.
Indication : extraire une base de A et raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de cette base.

Exercice 13

Soient n un entier naturel strictement positif, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ U & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. a) Montrer que λ est valeur propre de V si et seulement si λ^2 est valeur propre de U.
   b) Soit λ une valeur propre de V. Montrer que la dimension du sous-espace propre relatif à λ pour V est égal à la dimension du sous-espace propre de U relatif à λ^2.
2. En déduire que V est diagonalisable si et seulement si U est inversible et diagonalisable.
Indication : V est diagonalisable si et seulement la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut $2n$.

6 Projections, symétries et affinités

Exercice 14

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & -6 \\ -3 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que cet endomorphisme est une affinité dont on précisera le rapport, la base et la direction.

Exercice 15

Soient $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. a) Montrer que f est une projection vectorielle si et seulement si $f \circ f = f$.
   b) En ce cas, donner la base et la direction de f en fonction de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. a) Montrer que f est une symétrie vectorielle si et seulement si $f \circ f = Id_E$.
   b) En ce cas, donner la base et la direction de f en fonction de $F = \ker(f - Id_E)$ et $G = \ker(f + Id_E)$.
3. On suppose que $\alpha \in K \setminus \{1\}$ et que f vérifie

$$f^2 - (\alpha + 1)f + \alpha Id_E = 0.$$

   On pose $F = \ker(f - Id_E)$ et $G = \ker(f - \alpha Id_E)$.
   a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
   b) Montrer que f est l'affinité par rapport à F, de direction G et de rapport α.

Exercice 16

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad p(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{5} - \frac{2y}{5} \\ \frac{3x}{5} + \frac{6y}{5} \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est une projection vectorielle dont on déterminera la base et la direction.

Exercice 17

Soient $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une affinité si et seulement si f est diagonalisable et possède deux valeurs propres dont l'une vaut 1.