Feuille de TD n^{o}3

7 Applications affines

Exercice 18

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie dans les coordonnées usuelles par

$$f(x, y) = (2x - 5y + 3,\ -4x + 10y - 1).$$

1. Montrer que l'application f est affine, déterminer sa partie linéaire l et la matrice de l dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points fixes de f, c'est-à-dire les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = (x, y)$.
3. Montrer que Im l et $\ker l$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Donner une base de chacun de ces sous-espaces.

Exercice 19

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $h : E \longrightarrow E$ est une application affine de partie linéaire $u = \lambda Id_E$, où $\lambda \neq 0, 1$. On dit alors que h est une *homothétie* (affine) de rapport λ.

1. Montrer que h admet un unique point fixe.
2. a) Soit $v \in E$, montrer qu'il existe une unique homothétie de rapport $\lambda \neq 1$ laissant fixe v. On dit que c'est l'homothétie de rapport λ et de centre v.
   b) Soit $w \in E$. Montrer que l'image de $w \in E$ par h est caractérisée par l'égalité
   $$h(w) - v = \lambda(w - v).$$
3. Soient h_1 et h_2 deux homothéties de rapport λ_1 et λ_2 respectivement.
   a) Montrer que $h_1 \circ h_2$ est une homothétie sauf si $\lambda_1\lambda_2 = 1$.
   b) Que se passe-t-il si $\lambda_1\lambda_2 = 1$?

Exercice 20

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Décrire toutes les applications affines $f : E \longrightarrow E$ qui commutent avec les translations.

Exercice 21

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine de partie linéaire l. Montrer que f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de l.

Exercice 22

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie dans les coordonnées usuelles par

$$f(x, y) = \left(-2x - 2y + 5,\ \frac{3}{2}x + 2y - 1\right).$$

1. Montrer que f est affine, donner la matrice de l'application linéaire l associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que $l^2 = Id_{\mathbb{R}^2}$. Établir que l laisse stable la droite vectorielle $\mathbb{R}(-2, 1)$ et que l'ensemble des points invariants de l est une droite vectorielle dont une équation est donnée par $3x + 2y = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f, en déduire une description géométrique de f.

Exercice 23

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$ fixes par f. Montrer que la droite (AB) est invariante par f.

Exercice 24

On fixe un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ d'un espace affine de dimension 3.

1. Déterminer les expressions analytiques des applications suivantes :
   a) symétrie de base le plan d'équation $x + 2y + z = 1$ et de direction $< \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} >$,
   b) symétrie de base la droite d'équations $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+1 & = & 0 \\ 2y+z+2 & = & 0 \end{array} \right.$ et de direction le plan vectoriel d'équation $3x + 3y - 2z = 0$.
2. Reconnaître l'application ayant l'expression analytique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x' & = & 3x & + & 4y & + & 2z & - & 4 \\ y' & = & -2x & - & 3y & - & 2z & + & 4 \\ z' & = & 4x & + & 8y & + & 5z & - & 8 \end{array} \right. ,$$

   on pourra chercher les points fixes de cette application et étudier $\overrightarrow{MM'}$.

8 Espaces affines

Exercice 25

Montrer que les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont des sous-espaces affines et déterminer leur direction.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x - y = z - 1\right\}, \qquad E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x - y + 2 = z\right\},$$

$$E_3 = E_1 \cap E_2, \qquad E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 2u+v+1 \\ 1+2u+v \\ u-v \end{pmatrix}, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 26

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $a \in K$, on note $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_n(K),\ \operatorname{tr}(M) = a\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace affine, préciser un point de $\mathcal{E}$ et sa direction.

Exercice 27

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\mathcal{V}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. Montrer que $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tout couple (A, B) de points distincts de $\mathcal{V}$, la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{V}$.

Exercice 28

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. On considère deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$, on note $\mathcal{H}$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$. Déterminer $\dim \mathcal{H}$.