Feuille de TD n°4

Exercice 29

Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9 Applications affines (suite)

Exercice 30

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine, $O \in \mathcal{E}$ et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine qui envoie toute droite passant par O sur une droite parallèle. Montrer que f est une translation ou une homothétie.

Exercice 31 **Permutation circulaire de quatre points.**

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $A, B, C, D \in \mathcal{E}$. Étudier l'existence d'une application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$ et $f(D) = A$.

Exercice 32

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine, $O \in \mathcal{E}$ et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine. On cherche à décomposer f sous la forme $t_1 \circ u_1$ ou $u_2 \circ t_2$ où t_i est une translation et u_i est une application affine fixant O.

1. Montrer que le problème revient à trouver des translations t_i, $i \in \{1, 2\}$ telles que $(t_1^{-1} \circ f)(O) = O$ et $(f \circ t_2^{-1})(O) = O$.
2. Démontrer que t_1 existe et est unique. Préciser son vecteur de translation.
3. Montrer que t_2 existe si et seulement si $O \in \mathrm{Im}\, f$. Préciser les vecteurs de translations possibles en ce cas.

Exercice 33

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine. On dit que f est une *symétrie-translation* s'il existe une symétrie s et une translation t telles que $f = s \circ t = t \circ s$.

1. Soient s une symétrie de base $\mathcal{B}$ et de direction F et t une translation de vecteur u. Montrer que $s \circ t = t \circ s$ si et seulement si $u \in \overrightarrow{\mathcal{B}}$, où $\overrightarrow{\mathcal{B}}$ est la direction de $\mathcal{B}$.
2. Soit f une symétrie-translation. Montrer que le couple (s, t) tel que $s \circ t = t \circ s = f$ est unique.
3. Soit f une application affine quelconque. Montrer que f est une symétrie-translation si et seulement si $f \circ f$ est une translation.
4. En déduire que le produit d'une symétrie par une translation quelconques est une symétrie-translation.
5. Décomposer l'application f dont l'expression analytique donnée dans un repère quelconque $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1), \\ y' & = & \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 2), \\ z' & = & \frac{1}{3}(-2x - 2y + z - 1) \end{array} \right.$$

Exercice 34

On munit un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 d'un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

1. Donner l'expression analytique de la projection sur le plan $\mathcal{P}$ décrit par l'équation $x+y+z = 1$ dans la direction $D = \mathrm{vect}\,(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3})$.
2. Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à la droite décrite par les équations $\left\{ \begin{array}{lcl} x + y + 1 & = & 0 \\ 2y + z + 2 & = & 0 \end{array} \right.$ et de direction le plan vectoriel d'équation $3x + 3y - 2z = 0$.

Exercice 35

On munit un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 d'un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Donner les éléments caractéristiques des applications d'expressions analytiques

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x' & = & x & & & - & z & + & 1 \\ 2y' & = & x & + & 2y & + & z & - & 1 \\ 2z' & = & -x & & & + & z & + & 1 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x' & = & 3x & + & 4y & + & 2z & - & 4 \\ y' & = & -2x & - & 3y & - & 2z & + & 4 \\ z' & = & 4x & + & 8y & + & 5z & - & 8 \end{array}\right. .$$

Exercice 36

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 et E sa direction. On considère deux sous-espaces affines $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ de $\mathcal{E}$ dirigés par F_1 et F_2. G_1 et G_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires de F_1 et F_2 respectivement.

Soient λ, μ deux réels différents de 1. On note u l'affinité de rapport λ par rapport à $\mathcal{F}_1$ dans la direction G_1 et v l'affinité de rapport λ par rapport à $\mathcal{F}_2$ dans la direction G_2. On suppose que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que $u(\mathcal{F}_2) \subseteq \mathcal{F}_2$ et que $\overrightarrow{u}(G_2) \subseteq G_2$ où $\overrightarrow{u}$ est la partie linéaire de u.
2. En considérant les espaces vectoriels $F_1 \cap F_2$, $F_1 \cap G_2$, $G_1 \cap F_2$, $G_1 \cap G_2$, montrer que la partie linéaire de $f = u \circ v = v \circ u$ est diagonalisable.
3. Soit $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine dont la partie linéaire est diagonalisable. Montrer que s'il existe deux affinités a, b telles que $g = a \circ b = b \circ a$, alors l'ensemble des points fixes de g est non vide.

Exercice 37

Dans l'espace $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ vu comme un espace affine, on considère un endomorphisme affine f qui admet un hyperplan de points fixes $\mathcal{F}$. Soit A un point de $\mathcal{E}$ qui n'est pas dans $\mathcal{F}$.

1. Que peut-on dire de f si $f(A) = A$?
2. On suppose désormais que $f(A) \neq A$. On suppose que la droite $(Af(A))$ coupe le plan $\mathcal{F}$ en Ω. Pour $M \in \mathcal{E}$, expliquer comment construire $f(M)$. En déduire la nature de f.
3. On suppose que la droite $(Af(A))$ ne coupe pas le plan $\mathcal{F}$ en un point Ω. Pour $M \in \mathcal{E}$, expliquer comment construire $f(M)$. En ce cas, on dit que f est une *transvection*.

10 Espaces affines (suite)

Exercice 38

Soient $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Quelle est la dimension du plus petit sous-espace affine contenant les points dont les coordonnées respectives sont celles v et celles de w ?
2. Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel contenant v et w est un plan que l'on notera F.
3. Trouver une forme linéaire f telle que $F = \ker f$.
4. Déterminer une équation cartésienne du sous-espace affine qui passe par $P = (0, 2, 1)$ et est dirigé par F.

Exercice 39

On considère deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$. On note $f = \dim \mathcal{F}$, $g = \dim \mathcal{G}$ et on suppose que $f \leqslant g$. Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles si et seulement s'il existe un sous-espace affine $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ de dimension $g + 1$ contenant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.