Feuille de TD n^{o}5

Exercice 40

On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni de son repère canonique, on note

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner un système d'équations linéaires décrivant la droite $\mathcal{D}$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ et passant par le point A.
2. On note $\mathcal{P}$ le plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ et passant par le point B. Donner une équation linéaire décrivant $\mathcal{P}$.
3. a) Donner un système d'équations linéaires décrivant la droite $\mathcal{D}'$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v_4}$ et passant par C.
   b) Donner une équation décrivant le plan $\mathcal{Q}$ contenant la droite $\mathcal{D}'$ et le point D.
4. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est une droite, on donnera un point et un vecteur directeur de cette droite.

Exercice 41

Soient I, J et K trois points points du plan. Montrer les équivalences entre les propriétés suivantes.

1. I, J et K sont alignés.
2. Il existe un point M tel que $\det\left(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}\right) + \det\left(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}\right) + \det\left(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}\right) = 0$.
3. Pour tout point M, on a $\det\left(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}\right) + \det\left(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}\right) + \det\left(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}\right) = 0$.

Exercice 42

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni de son repère canonique, on considère les droites $\mathcal{D} : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$.

1. Pour quelles valeurs de a les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles coplanaires ?
2. Donner alors l'équation du plan les contenant.

Exercice 43

On considère deux plans non parallèles de $\mathbb{R}^3$ décrits dans le repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ par

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Soient $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ et $\mathcal{Q}$ un plan de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathcal{Q}$ contient $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que $\mathcal{Q}$ est décrit par l'équation

$$\alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') = 0.$$

Exercice 44

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, soit la famille de droites $\mathcal{D}_\lambda : \begin{cases} x = \lambda + \lambda^2 z \\ y = \lambda^2 + \lambda z \end{cases}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. En écrivant leurs équations sous la forme $\begin{cases} z = a \\ ux + vy + h \end{cases}$, montrer qu'il existe deux droites horizontales Δ_1, Δ_2 qui intersectent $\mathcal{D}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Donner une équation du plan contenant $M = (\lambda, \lambda^2, 0)$ et Δ_1. Même question pour M et Δ_2.
3. Retrouver $(\mathcal{D}_\lambda)$.