Feuille de TD n^{o}7

12 Coniques

Exercice 54

Soit $\mathcal{C}$ la conique de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + xy + y^2 = x + y$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une ellipse.
2. Donner une équation de l'image $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ par la symétrie par rapport à la droite d'équation $x + y = 1$ dans la direction $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\mathcal{C}'$ est aussi une ellipse. Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice 55

Soit un réel m. On considère la conique $\mathcal{C}_m$ d'équation $mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0$. Donner le centre de $\mathcal{C}_m$. Trouver la nature de $\mathcal{C}_m$ en fonction de m.

Exercice 56

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, on considère les points $A = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par B et dirigée par $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. On note $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ contenant A et $\mathcal{D}$.
2. Soit p la projection sur $\mathcal{P}$ dans la direction $\overrightarrow{w}$. Déterminer l'expression analytique de p.
3. Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans le plan $z = 0$. Déterminer l'image de $\mathcal{C}$ par p.

Exercice 57

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine réel muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On note (x, y) les coordonnées dans $\mathcal{R}$ et on considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 16x - 16y + 8 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une hyperbole. Préciser son centre.
2. Trouver un repère $\mathcal{R}' = \left(O', \overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}\right)$ de $\mathcal{E}$ dans lequel $\mathcal{C}$ a pour équation $x'^2 - y'^2 = 1$, en notant (x', y') les coordonnées dans $\mathcal{R}'$.
3. Donner les équations des asymptotes de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Exercice 58

Dans cet exercice, on considère une parabole $\mathcal{P}$ du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation $y^2 = 2px$ où $p \in \mathbb{R}_+^\star$ est fixé.

1. Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$. Trouver une équation de la normale à $\mathcal{P}$ en (x_0, y_0) en fonction de x_0, y_0 et p.
2. Soient M, M' et M'' trois points distincts de $\mathcal{P}$ tels que les normales à $\mathcal{P}$ en ces points soient concourantes. Montrer que l'isobarycentre de M, M' et M'' appartient à l'axe (Ox).

Exercice 59

Soit $\mathcal{C}$ la conique de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 - 3xy + 2y^2 + y = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une hyperbole, déterminer son centre de symétrie et ses asymptotes.
2. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées.
3. Quelle est la tangente à $\mathcal{C}$ en $(0, 0)$? Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par $(1, 1)$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver en fonction de a le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $y = a$. En déduire les tangentes horizontales à $\mathcal{C}$, préciser les points de tangence.