MOSE 1003

Notes du cours Analyse-Algèbre,

pierre.lezowski@math.u-bordeaux1.fr

27 novembre 2011

Table des matières

Ce fichier contient le cours du module « Analyse-Algèbre » du premier semestre de la licence « Sciences de la vie, de la terre et de l'environnement ». Ce document peut comporter des coquilles et dans le doute, n'hésitez pas à le comparer avec vos notes prises en cours. Vous pouvez me signaler toute erreur par mail à l'adresse pierre.lezowski@math.u-bordeaux1.fr.

Chapitre 1

Dérivation et intégration

I Fonctions usuelles et dérivation

On considère des fonctions d'une variable réelle de la forme $f : \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$ où X est une partie de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion d'intervalles (par exemple, $X = \mathbb{R}$, $X =]0, +\infty[$, ou encore $X =]-\infty, -3[\cup]-2, 0[\cup]0, +\infty[$).

I.1 Continuité et négligeabilité

I.1.1 Continuité

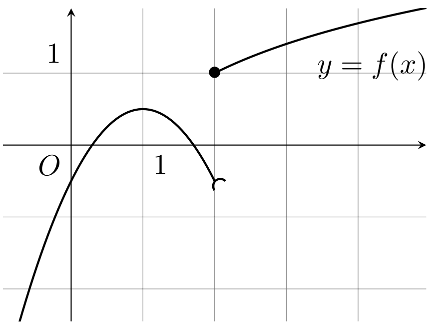
Définition.

On dit que f est *continue* en $x_0 \in X$ si pour tout élément x de X proche de x_0, $f(x)$ est proche de $f(x_0)$. On dit que f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout $x_0 \in I$.

Cette définition formalise l'intuition selon laquelle les fonctions continues sur un intervalle sont les fonctions dont on peut tracer le graphe « sans lever le crayon ».

Exemple. La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 + x + 3 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple. Soit la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



La fonction f n'est pas continue, parce qu'elle n'est pas continue en 2. En effet, on peut considérer $x < 2$ aussi proche de 2 que l'on veut mais tel que $f(x)$ ne s'approche pas de $f(2) = 1$. Toutefois, f est continue en 1, on peut tracer la courbe représentative de f près de 1 « sans lever le crayon ».

Proposition 1.1.

Si f et g sont deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $f+g$, $f \cdot g$ sont continues en x_0. Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.
Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f : x \longmapsto g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$ est continue en x_0.

I.1.2 Négligeabilité

On considère un intervalle ouvert $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$ et deux fonctions *continues* $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$, on veut comparer le comportement de $f(x)$ et $g(x)$ pour les éléments $x \in I$ proches de x_0. On suppose que g n'est pas la fonction nulle.

Définition.

On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de x_0 si

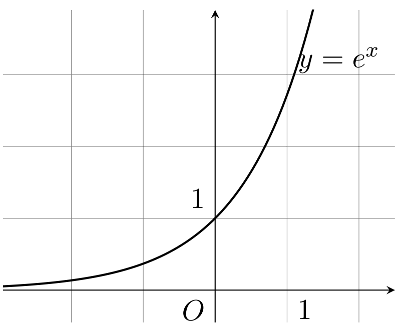
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Remarque. En ce cas, on note $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$. La notation o est appelée « petit o ».

Exemples.
- $x^3 = \underset{x \to 0}{o}(x)$.
- Une fonction f tend vers 0 en x_0 si et seulement si elle est négligeable devant la fonction constante égale à 1, c'est-à-dire, $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(1)$.

I.2 Fonctions usuelles à connaître

I.2.1 Exponentielle



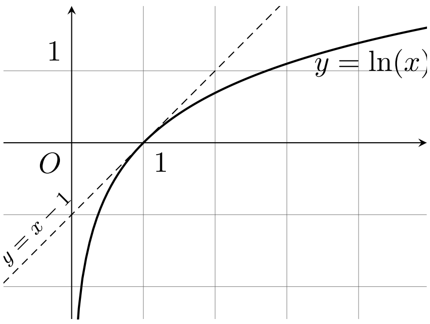
La fonction $\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) = e^x \end{array} \right.$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tous réels x, y, $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

$$e^0 = 1, \qquad e^1 = e \simeq 2,718.$$

I.2.2 Logarithme



La fonction $\ln : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{cases}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star =]0,+\infty[$.

Pour tous $x, y \in]0,+\infty[$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $e^{\ln(x)} = x$. On dit que $\exp$ et $\ln$ sont *réciproques*.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

$$\ln(1) = 0, \qquad \ln(e) = 1.$$

I.2.3 Fonctions puissances

Définition

Pour tout réel α, on définit la fonction puissance $f_\alpha : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & e^{\alpha \ln(x)} \end{cases}$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on note

$$x^\alpha = f_\alpha(x).$$

Remarque. Cette notion est compatible avec la notation « classique ». Par exemple, on a $f_2(x) = e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x)+\ln(x)} = e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(x)} = x \cdot x = x^2$.

Proposition 1.2.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, pour tous réels α, β,

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta.$$

Remarque. Avec les notations du paragraphe I.1.2, la deuxième propriété donne par exemple $\ln(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Croissances comparées

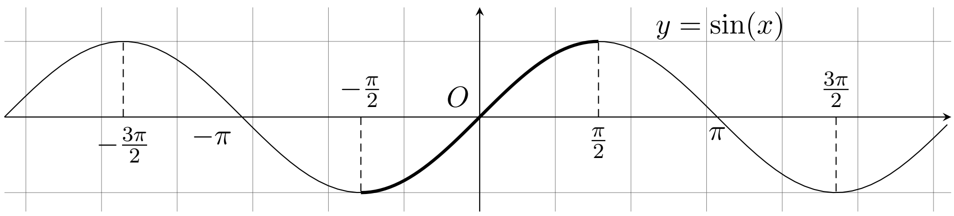
Généralement les fonctions puissances « l'emportent sur le logarithme, mais pas sur l'exponentielle ». La proposition suivante formule plus rigoureusement cette propriété.

Proposition 1.3.

1. *Pour tous* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$.
2. *Pour tous* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\alpha = 0$.
3. *Pour tous* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

I.2.4 Fonctions trigonométriques

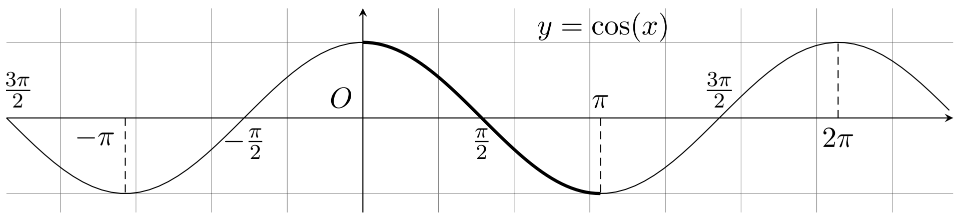
Sinus



La fonction sin : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique (c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$). Elle est impaire : pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, on peut aussi noter les quelques valeurs suivantes :

$$\sin(0) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Cosinus

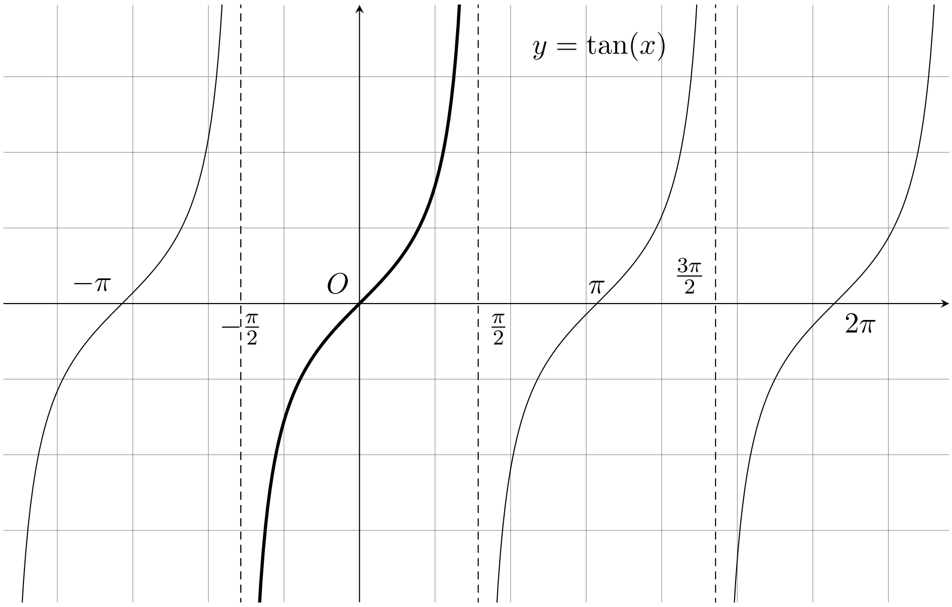


La fonction cos : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Elle est paire : pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, on peut aussi noter les quelques valeurs suivantes :

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1.$$

Pour tout réel x, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont reliés par la formule $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$.

Tangente



La fonction tangente est définie par la formule $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, ce qui n'est possible que lorsque $\cos(x) \neq 0$. Par conséquent, la fonction $\tan$ est définie sur $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle est continue strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et impaire : pour tout $x \in E$, $\tan(-x) = -\tan(x)$.

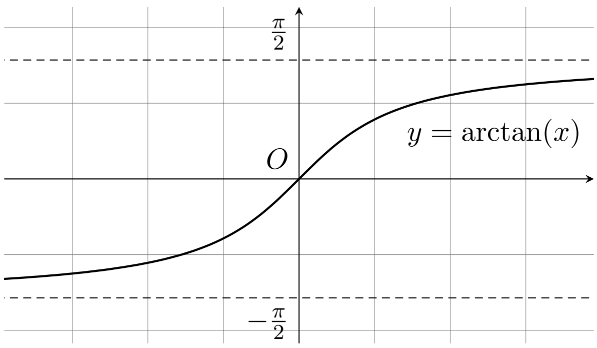
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty, \qquad \tan(0) = 0.$$

Réciproques des fonctions trigonométriques

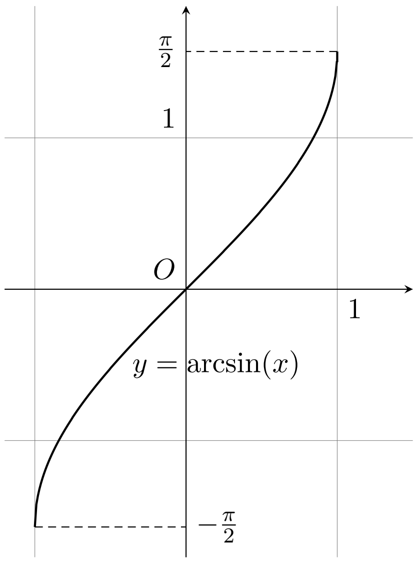
La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'image de cet intervalle est $\mathbb{R}$, cela implique qu'il existe une fonction appelée arc tangente et notée

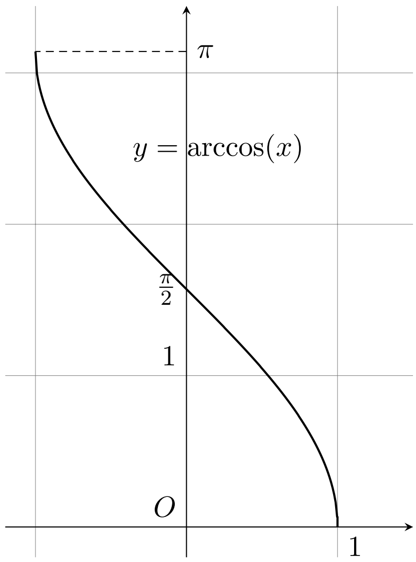
$$\arctan : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array} \right. ,$$

qui est la *réciproque* de $\tan$, c'est-à-dire telle que pour réel x, $\tan(\arctan(x)) = x$ et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.



On peut de même définir des fonctions réciproques pour les fonctions sin et cos, ce sont respectivement « arc sinus » notée arcsin : $\left\{\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}\right.$ et « arc cosinus » notée arccos : $\left\{\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos(x) \end{array}\right.$. Les courbes représentatives de ces fonctions sont données ci-après.





I.2.5 Dérivabilité

Définition et propriétés

On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Définition.

On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement si la limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe et est finie. En ce cas, on note cette limite $f'(x_0)$, c'est la *dérivée* de f en x_0. La fonction f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout $x_0 \in I$.

Exemple. La fonction $x \longmapsto x^2+x+1$ est dérivable en 0 de dérivée 1 car

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2+h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1.$$

Remarques. 1. Une fonction dérivable sur I est continue sur I.

2. Si f est dérivable en x_0, alors, avec les notations du paragraphe I.1.2,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \underset{h\to 0}{o}(h)\,.$$

Dérivées usuelles

Le tableau suivant donne les formules pour les dérivées des fonctions usuelles rencontrées au paragraphe précédent.

$f(x)$	$f'(x)$
x^α où $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Croissance, décroissance

Soit f une fonction à valeurs réelles dérivable sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$.

Proposition 1.4.

f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ (respectivement $f'(x) \leqslant 0$).
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement *croissante (respectivement* strictement *décroissante) sur I.*

Exemple. La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.

II Intégration

II.1 Définitions, premières propriétés

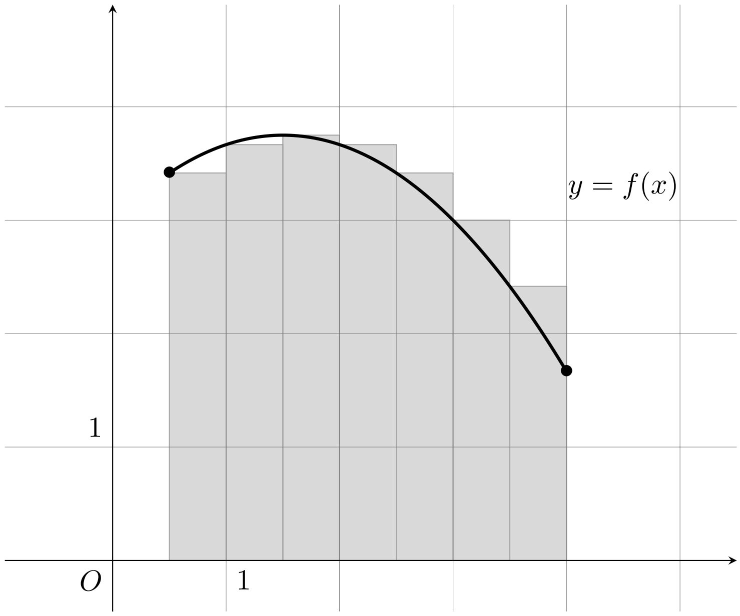
Dans ce paragraphe, nous allons définir l'intégrale d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ où elle est définie.

II.1.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme l'aire sous la courbe représentative de f, on la note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$



Même si la notion d'aire sous la courbe est une notion qui paraît concrète, il faut voir comment on la définit exactement. Pour ça, on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. Sur chaque intervalle $I_k = \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right]$ pour $0 \leqslant k < n$, on approche la fonction f par f_n qui est égale à $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. Cela définit une fonction f_n « en escaliers ». Plus n est grand, plus f_n approche finement f, de sorte que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Or on sait calculer l'aire sous la courbe d'une fonction définie « en escaliers », c'est la somme des aires des rectangles, cela définit donc proprement l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

II.1.2 Intégrale d'une fonction continue

Dans le paragraphe précédent, on a défini l'intégrale seulement pour les fonctions continues et *positives*. Pour une fonction continue quelconque, on procède ainsi.

Définition.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $t \in [a,b]$, on définit $f^+(t) = \max(f(t),0)$ et $f^-(t) = \max(-f(t),0)$, de sorte que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$. Alors on définit

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t.$$

Dans la définition précédente, l'intégrale des fonctions f^+ et f^- est bien définie car ce sont des fonctions continues et positives,

Jusqu'à présent, on a considéré l'intégrale d'une fonction avec les bornes rangées dans l'ordre croissant, on peut considérer des bornes rangées dans un ordre quelconque après la définition suivante.

Définition.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (avec $a \leqslant b$). On pose

$$\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

II.1.3 Propriétés

Considérons tout d'abord quelques intégrales facilement calculables.

Exemple. Soient a et b deux nombres réels, alors

1. $\int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{d}t = b - a$,
2. $\int_a^b 0 \cdot \mathrm{d}t = 0$,
3. $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$ pour toute fonction f.

La définition de l'intégrale d'une fonction continue conduit également aux propriétés suivantes.

Proposition 1.5 (relation de Chasles)**.**

Soient a, b, c trois réels et f une fonction continue sur un intervalle contenant a, b et c, alors

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 1.6 (linéarité de l'intégrale).

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles et continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tous nombres réels λ et μ,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\, \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple. On peut calculer l'intégrale $\int_0^1 (2t^2 + 3)\mathrm{d}t$ en écrivant

$$\int_0^1 (2t^2 + 3)\mathrm{d}t \quad = \quad 2\int_0^1 t^2\mathrm{d}t + 3\int_0^1 \mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, on a le théorème suivant, qui relie dérivée et intégrale.

Théorème 1.7 (théorème fondamental de l'analyse).

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction F définie sur $[a, b]$ par

$$\textit{pour tout } x \in [a, b],\ F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

est dérivable et sa dérivée est $F' = f$.

II.2 Techniques d'intégration

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment calculer des intégrales.

II.2.1 Primitives

Définition.

Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On dit que F est une primitive de f (sur $[a, b]$) si

$$F' = f.$$

Le théorème 1.7 donne une primitive d'une fonction continue calculée grâce à une intégrale. Réciproquement, on peut calculer l'intégrale d'une fonction si on connaît une de ses primitives.

Proposition 1.8.

Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une primitive de* f*. Alors*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Démonstration. D'après le théorème 1.7, la fonction F_0 définie pour $x \in [a,b]$ par

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de f. Donc la différence $F - F_0$ est constante. Or $F(a) - F_0(a) = F(a)$, donc pour tout $x \in [a,b]$, $F(x) - F_0(x) = F(a)$, en particulier

$$F(b) - F(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

□

Le tableau suivant donne quelques primitives usuelles F de fonctions f, ainsi que les dérivées f'.

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c,$ où $c \in \mathbb{R}$	0	0
si $\alpha \neq -1,\ \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c,$ où $c \in \mathbb{R}$	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln(\lvert x\rvert) + c,$ où $c \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$e^x + c,$ où $c \in \mathbb{R}$	e^x	e^x
$-\cos(x) + c,$ où $c \in \mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x) + c,$ où $c \in \mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Remarque. Étant donné une fonction f, on note parfois $\displaystyle\int f$ une primitive de f.

II.2.2 Intégration par parties

Proposition 1.9 (intégration par parties).

Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables telles que* f' *et* g' *sont continues sur* $[a,b]$. *Alors*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. La fonction fg est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $t \in [a, b]$, $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$. C'est la somme de produits de fonctions continues, donc c'est une fonction continue qu'on peut intégrer sur $[a, b]$:

$$\int_a^b (fg)'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))\mathrm{d}t = \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t,$$

donc

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (fg)'(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_a^b (fg)'(t)\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b$ d'après la proposition 1.8, ce qui nous donne la formule. □

Exemple. On peut calculer l'intégrale $\int_0^1 te^t\mathrm{d}t$ par parties. Si on note $f(t) = t$ et $g'(t) = e^t$, alors $f'(t) = 1$ et $g(t) = e^t$, de sorte que f et g sont deux fonctions dérivables à dérivée continue sur $[0, 1]$. On peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 te^t\mathrm{d}t &= \Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 e^t\mathrm{d}t,\\ &= e - \Big[e^t\Big]_0^1,\\ &= e - (e-1),\\ &= 1.\end{aligned}$$

II.2.3 Changement de variable

Proposition 1.10 (changement de variable)**.**

Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ une fonction dérivable dont la dérivée g' est continue. Alors

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t)\mathrm{d}t = \int_c^d f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. La fonction f étant continue, on considère une primitive F de f sur son ensemble de définition. Alors $F \circ g$ est dérivable sur $[c, d]$ et pour tout $x \in [c, d]$,

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Par conséquent, $F \circ g$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto f(g(x)) \cdot g'(x)$ sur $[c, d]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_c^d f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x &= \Big[F(g(x))\Big]_c^d \\ &= \Big[F(t)\Big]_{g(c)}^{g(d)} \\ &= \int_{g(c)}^{g(d)} f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

Exemple. On peut calculer l'intégrale $\int_0^1 x \cdot e^{\frac{x^2+1}{2}}\mathrm{d}x$ par changement de variable. En effet, en posant $f(x) = e^x$ et $g(x) = \frac{x^2+1}{2}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g'(x) = x$ continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$\int_0^1 x \cdot e^{\frac{x^2+1}{2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(0)}^{g(1)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^t\mathrm{d}t = \Big[e^t\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{1}{2}}.$$

III Dérivées successives, formules de Taylor et développements limités

III.1 Dérivées successives

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et n un entier naturel strictement positif. On note $f^{(0)} = f$ et on définit $f^{(n)}$ par récurrence (de proche en proche). Pour $x_0 \in I$, $f^{(n)}(x_0)$ est la dérivée (si elle existe de $f^{(n-1)}$ en x_0.

Exemple. Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(3x) \end{array}\right.$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(1)}(x) = f'(x) = 3\cos(3x)$. Comme $f^{(1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -9\sin(3x)$.

En fait pour tout entier n, f est dérivable à l'ordre n et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(2k)}(x) = (-9)^k \sin(3x) \qquad \text{et} \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cdot 3^{2k+1} \cdot \cos(3x).$$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, alors pour tout $x_0 \in I$, on peut donner une approximation de $f(x)$ pour x proche de x_0 en fonction de $f(x_0)$ et $f'(x_0)$, en effet, par définition de la dérivabilité,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)\,.$$

Le but des deux paragraphes suivants va être de généraliser et d'étendre cette formule.

III.2 Formules de Taylor à l'ordre 1

Il existe plusieurs variantes des formules de Taylor, elles ont toutes la même forme, mais le reste varie, nous allons voir deux d'entre elles, la formule de Taylor-Young et la formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème 1.11 (Taylor à l'ordre 1)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$, tel que $x_0 + h \in I$. il existe un terme $R_1(h)$ tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + R_1(h),$$

où R_1 vérifie

1. *$R_1(h) = \underset{h\to 0}{o}(h)$ (formule de Taylor-Young),*
2. *si f est deux fois dérivable et f'' est continue, $R_1(h) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f''(t)(x_0 + h - t)\mathrm{d}t$ (formule de Taylor avec reste intégral).*

Remarques. 1. La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 est une reformulation de la définition de la dérivée.

2. La formule de Taylor avec reste intégral est plus précise (elle donne exactement la valeur du reste), mais elle nécessite la continuité de la dérivée f'.

Exemples. – Soient $f(x) = \exp(x) = e^x$ et $x_0 = 0$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \exp(x)$. Ainsi, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour f en x_0 est la suivante : pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$e^h = f(h) = 1 + h + \underset{h\to 0}{o}(h)\,.$$

Comme la dérivée f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'' = \exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut aussi écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 : pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$e^h = f(h) = 1 + h + \int_0^h e^t(h - t)\mathrm{d}t.$$

– Soient $f(x) = \ln(1 + x)$ et $x_0 = 0$. La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, et pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 s'écrit donc : pour tout $h \in]-1, +\infty[$,

$$\ln(1 + h) = f(h) = h + \underset{h\to 0}{o}(h)\,.$$

La fonction f' est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, de sorte que f'' est continue sur $]-1, +\infty[$. On peut donc appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 : pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\ln(1 + h) = f(h) = h + \int_0^h \frac{t - h}{2(1 + t)^2}\mathrm{d}t.$$

III.3 Formules de Taylor à l'ordre 2

Si f est deux dérivable, on peut obtenir des résultats plus précis.

Théorème 1.12 (Taylor à l'ordre 2)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$, tel que $x_0 + h \in I$. il existe un terme $R_2(h)$ tel que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + R_2(h),$$

où R_2 vérifie

1. *$R_2(h) = \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)$ (formule de Taylor-Young),*
2. *si f est trois fois dérivable et $f^{(3)}$ est continue, $R_2(h) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f^{(3)}(t)\frac{(x_0+h-t)^2}{2}\,\mathrm{d}t$ (formule de Taylor avec reste intégral).*

Remarque. Les formules de Taylor sont plus précises à l'ordre 2 qu'à l'ordre 1. En effet, on a

$$\frac{\frac{h^2}{2} f''(x_0) + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc $\frac{h^2}{2} f''(x_0) + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right) = \underset{h\to 0}{o}(h)$.

Cela correspond à l'intuition selon laquelle pour h « petit » (par exemple $h = \frac{1}{10}$), h^2 (ici, $h^2 = \frac{1}{100}$) est plus petit que h.

Exemples.

– Soient $f(x) = \exp(x) = e^x$ et $x_0 = 0$, alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f''(x) = \exp(x)$. Ainsi, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour f en $x_0 = 0$ est la suivante : pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$e^h = f(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right).$$

Comme la dérivée f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(3)} = \exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut aussi écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 : pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$e^h = f(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \int_0^h e^t \frac{(h-t)^2}{2}\mathrm{d}t.$$

– Soient $f(x) = \ln(1+x)$ et $x_0 = 0$. La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$, et pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 s'écrit donc : pour tout $h \in]-1,+\infty[$,

$$\ln(1+h) = f(h) = h - \frac{h^2}{2} \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right).$$

La fonction f'' est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, de sorte que $f^{(3)}$ est continue sur $]-1,+\infty[$. On peut donc appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 : pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\ln(1+h) = f(h) = h - \frac{h^2}{2} + \int_0^h \frac{h-t}{(1+t)^3}\mathrm{d}t.$$

Le paragraphe suivant va donner une application de la formule de Taylor-Young.

III.4 Développements limités

Définition.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et n un entier naturel. Un développement limité à l'ordre n de f au voisinage de x_0 est une formule de la forme suivante : pour tout h tel que $x_0 + h \in I$,

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n),$$

les éléments $a_0, a_1, \ldots, a_n$ étant des nombres réels.

Exemple. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 nous donne un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0 : pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right).$$

De même, on peut obtenir les quelques développements limités suivants.

$f(x)$	Développement limité à l'ordre 2 en 0
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
$\sin(x)$	$x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
$\tan(x)$	$x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$

IV Fonctions de deux variables

Dans cette partie, on va étudier les fonctions de deux variables, c'est-à-dire les fonctions de la forme

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right. .$$

Les techniques abordées ici peuvent s'étendre aux fonctions d'un nombre fini de variables.

IV.1 Dérivées partielles

Pour étudier les fonctions d'une variable réelle, on a souvent recours à la dérivée. Comme il y a plusieurs variables, on ne peut pas tout à fait procéder de la même façon. Cependant, on peut considérer chaque variable séparément.

Définition.

La dérivée partielle de f en (x_0, y_0) par rapport à x (la première variable) est la dérivée en x_0 de la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y_0) \end{array} \right.$. On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou encore $f_x(x_0, y_0)$.
On peut définir de même la dérivée partielle par rapport à y (la seconde variable) en (x_0, y_0), notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou encore $f_y(x_0, y_0)$ comme la dérivée en y_0 de la fonction d'une variable $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x_0,y) \end{array} \right.$.

Ainsi, par définition de la dérivée d'une fonction d'une variable réelle,

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Exemple (1). Considérons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + 3xy + y^2 \end{array} \right.$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x + 2y$. On peut calculer les dérivées partielles des fonctions de deux variables $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x + 3y \end{array} \right.$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 3x + 2y \end{array} \right.$.

On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Alors on calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$.

Exemple (2). Considérons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \exp\left(3x + 7y^2\right) + y \end{array} \right.$. On peut calculer les dérivées partielles en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 \exp\left(3x + 7y^2\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 14y \exp\left(3x + 7y^2\right) + 1.$$

Calculons à présent les dérivées partielles d'ordre 2, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 9 \exp\left(3x + 7y^2\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 42y \exp\left(3x + 7y^2\right).$$

De même, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 42y \exp\left(3x + 7y^2\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 14(1 + 14y^2) \exp\left(3x + 7y^2\right).$$

Sur ces deux exemples, on observe que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. En fait, on a le résultat suivant.

Théorème 1.13 (Schwarz).

Si une fonction de deux variables f est assez lisse[a], alors on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

a. l'hypothèse précise est que les dérivées partielles de second ordre sont continues.

IV.2 Gradient et extrema locaux

Définition.

Un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est un *extremum local* de f s'il existe un disque D du plan $\mathbb{R}^2$ de rayon $r > 0$ et contenant (x_0, y_0) tel que pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$ (c'est alors un *minimum* local) ou pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ (c'est alors un *maximum* local).

Concrètement, cela signifie que (x_0, y_0) est un minimum (respectivement maximum) local de f si, quand on se déplace autour de (x_0, y_0), on obtient toujours des valeurs de f supérieures (respectivement inférieures) à $f(x_0, y_0)$.

Pour étudier les maxima et minima locaux d'une fonction d'une variable réelle, on peut utiliser la dérivée ; pour les fonctions de deux variables, on va utiliser le *gradient*.

Définition.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on appelle *gradient* de f en (x_0, y_0) le vecteur

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un point (x_0, y_0) est *critique* pour f si et seulement si $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le symbole ∇ s'appelle « nabla ». On peut aussi notre $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ à la place de ∇f.

Proposition 1.14.

Tout extremum local est un point critique, mais la réciproque n'est pas vraie.

Remarque. Cette propriété est aussi vraie pour les fonctions d'une variable réelle : un point où la dérivée s'annule n'est pas forcément un minimum ou un maximum local (par exemple, la dérivée de $x \longmapsto x^3$ s'annule en 0, mais 0 n'est ni un minimum local, ni un maximum local).

Exemples.

1. Considérons la fonction f de deux variables définies par $f(x, y) = x^3$. Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Tout point de la forme $(0, y)$, pour $y \in \mathbb{R}$, mais aucun n'est extremum local.

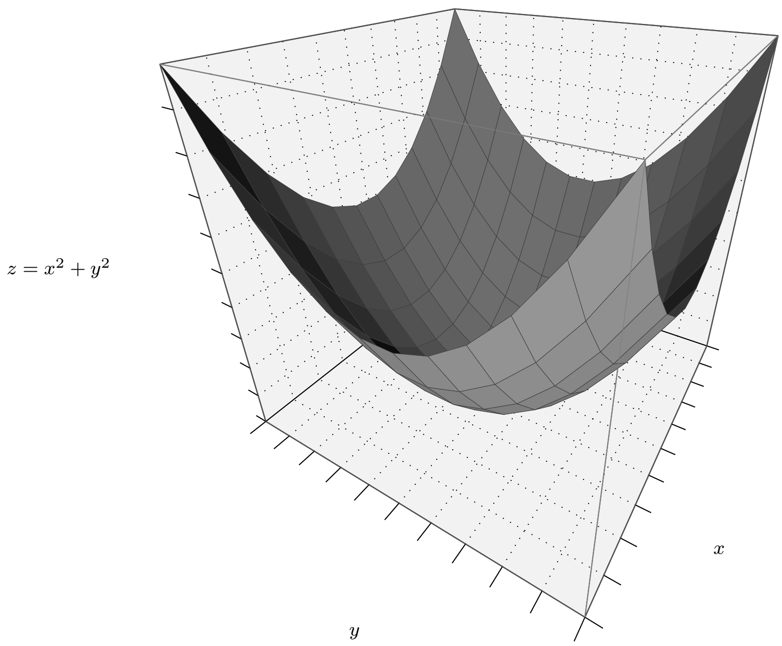
   En effet, étant donné $y \in \mathbb{R}$, pour tout $r > 0$,

   $$f(-r, y) = -r^3 < 0 = f(0, y) < r^3 = f(r, y).$$

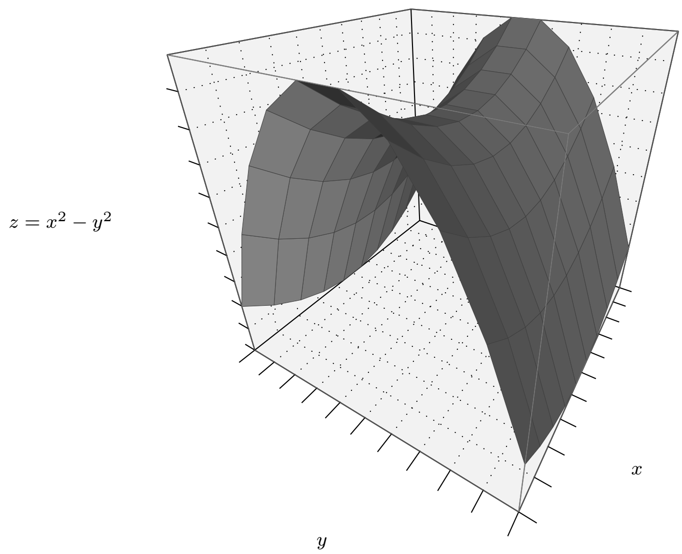
2. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$. Donc f admet un unique point critique : $(0, 0)$. Ce point est un minimum local (et même global) de f.

   En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$f(x, y) = x^2 + y^2 \geqslant 0 = f(0, 0).$$



3. Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$. Donc f admet un unique point critique : $(0,0)$. Ce point n'est pas un extremum local de f.
En effet, pour tout $h > 0$,
$$f(0,h) = -h^2 < 0 = f(0,0) < f(0,-h) = h^2.$$



IV.3 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Comme pour les fonctions d'une variable, on souhaite approcher f au voisinage d'un point par des polynômes.

Proposition 1.15 (formule de Taylor-Young à l'ordre 2).

Soient f une fonction de deux variables et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si f est suffisamment lisse, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(a+x,b+y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot y \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\cdot xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot y^2\right) \\ &\quad + \underset{(x,y)\to(0,0)}{o}\left(x^2+y^2\right). \end{aligned}$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 est particulièrement intéressante pour étudier le comportement d'une fonction autour d'un point critique.

Exemple. Soit $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$. Calculons le gradient de f en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

La fonction f admet donc deux points critiques $(1,0)$ et $(-1,0)$. On va déterminer s'il s'agit d'extrema locaux grâce à la formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

Pour l'appliquer, on a besoin de calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2.$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 appliquée à f en $(1,0)$ nous donne

$$f(1+x,y) = -2 + 3x^2 + y^2 + \underset{(x,y)\to(0,0)}{o}\left(x^2+y^2\right).$$

Pour x et y assez petits, le terme $\underset{(x,y)\to(0,0)}{o}\left(x^2+y^2\right)$ est négligeable devant $-2+3x^2+y^2$, donc $f(1+x,y)$ a le même comportement que $-2+3x^2+y^2$. Or pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$3x^2 + y^2 \geqslant 0,$$

donc pour (x,y) proche de $(0,0)$,

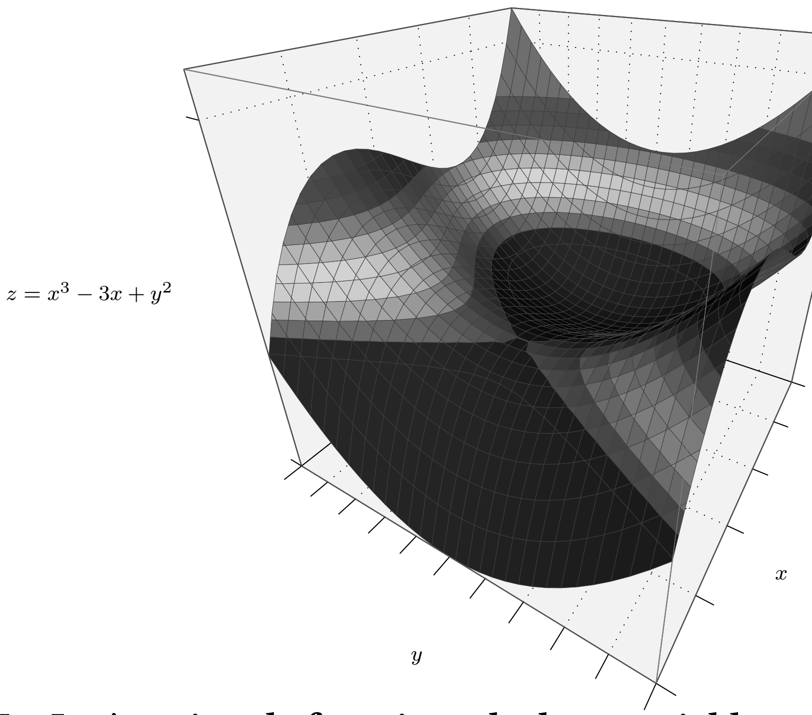
$$f(1+x,y) \geqslant -2 = f(1,0).$$

Cela montre que $(1,0)$ est un minimum local pour f.

On peut aussi appliquer la formule de Taylor-Young pour f en $(-1, 0)$:

$$f(-1 + x, y) = 2 - 3x^2 + y^2 + \underset{(x,y)\to(0,0)}{o}\left(x^2 + y^2\right).$$

De même, pour (x, y) proche de $(0, 0)$, $f(-1 + x, y)$ se comporte comme $2 - 3x^2 + y^2$. Cependant $-3x^2 + y^2$ peut être positif ou négatif, donc $(-1, 0)$ n'est pas un extremum local.



IV.4 Intégration de fonctions de deux variables

Le but de ce paragraphe n'est pas de présenter une théorie générale, mais de voir comment intégrer certaines fonctions de deux variables simples. L'intuition pour l'intégrale d'une fonction d'une variable est le calcul d'une aire, pour une fonction de deux variables, il s'agit du calcul d'un volume.

IV.4.1 Théorème de Fubini

Théorème 1.16 (Fubini).

Soit f une fonction de deux variables réelles continue sur $\mathbb{R}^2$. S'il existe deux fonctions φ_1 et φ_2 d'une variable telles que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$, alors pour tous réels a, b, c, d,

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) d(x, y) = \left(\int_a^b \varphi_1(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_c^d \varphi_2(y) dy\right).$$

Remarque. Le lecteur attentif remarquera qu'on n'a pas défini l'intégrale

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

On peut définir cette notion grâce au théorème précédent comme $\left(\int_a^b \varphi_1(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d \varphi_2(y)\mathrm{d}y\right)$. On pourra aussi écrire

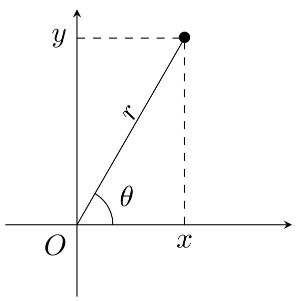
$$\int_{[a,b]}\int_{[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{[c,d]}\int_{[a,b]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

à la place de $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$.

Exemple. Calculons $\int_{[0,2]\times[-1,3]} e^{-x+y}d(x,y)$. On remarque que $e^{-x-y} = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)$ où $\varphi_1(x) = e^{-x}$ et $\varphi_2(y) = e^y$. Donc, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2]\times[-1,3]} e^{-x+y}d(x,y) &= \left(\int_0^2 e^{-x}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{-1}^3 e^y\mathrm{d}y\right)\\
&= \Big[-e^{-x}\Big]_0^2\cdot\Big[e^y\Big]_{-1}^3\\
&= \left(-e^{-2}+1\right)\cdot\left(e^3-e^{-1}\right)\\
&= e^3-e-e^{-1}+e^{-3}.
\end{aligned}$$

IV.4.2 Coordonnées polaires (paragraphe non abordé en cours)



Un point du plan peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y), mais aussi par ses coordonnées polaires (r,θ), où $r \geqslant 0$ est le *rayon* et $\theta \in [0,2\pi[$ l'*angle*. Les coordonnées sont reliées par les relations suivantes :

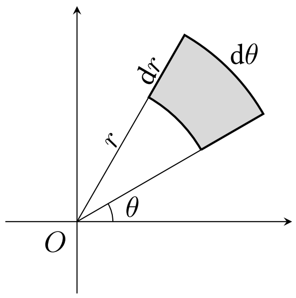
$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\\ y = r\sin(\theta)\end{cases}.$$

Jusqu'à présent, les intégrales des fonctions de deux variables étaient calculées sur un domaine « rectangulaire » de la forme $[a,b]\times[c,d]$. Si on veut intégrer une fonction de deux variables sur un disque, les coordonnées polaires sont particulièrement pratiques.

Si on considère le domaine $\mathcal{D}$ du plan tel que $\mathcal{D}$ corresponde aux points de coordonnées polaires (r,θ) tel que $r\in[\rho,R]$ et $\theta\in[\alpha,\beta]$, alors pour une fonction de deux variables f,

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{r=\rho}^{R}\int_{\theta=\alpha}^{\beta} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

On remplace donc $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ par $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.



Pseudo-justification. La quantité dxdy est la différence d'aire entre les rectangles de côtés respectifs $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$ et (x, y). Pour les coordonnées polaires, on considère les parties de disque définies par les rayons et angles respectifs (r, θ) et $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta)$. La différence d'aire entre ces deux surfaces est

$$\frac{(r+\mathrm{d}r)^2}{2}\mathrm{d}\theta - \frac{r^2}{2}\mathrm{d}\theta = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + (\mathrm{d}r)^2\mathrm{d}\theta,$$

dont le terme dominant (pour dr et dθ « petits ») est $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

Exemple. Soient $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & e^{x^2+y^2} \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}$ le disque de centre O et de rayon 2. Alors, d'après la formule de changement de variables en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

car $(x, y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $0 \leqslant r \leqslant 2$ (pour tout angle $\theta \in [0, 2\pi[$). Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} re^{r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \\
&= \left(\int_{r=0}^{2} re^{r^2}\mathrm{d}r\right)\cdot\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right) \quad \text{d'après le théorème de Fubini,} \\
&= \left[\frac{e^{r^2}}{2}\right]_0^2 \cdot 2\pi, \\
&= (e^4-1)\pi.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Introduction aux équations différentielles

Soient n un entier naturel, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle (que l'on notera généralement t ou x). On appelle *équation différentielle* d'ordre n une relation liant une fonction dérivable n fois et ses dérivées d'ordre inférieur à n de la forme

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t), \tag{E}$$

où $a_0, \ldots, a_n$ et b_n sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Définition.

On appelle *solution* de (E) sur I une fonction y qui est n fois dérivable et qui vérifie (E) pour tout $t \in I$. Le *second membre* de (E) est la fonction $b(t)$. L'équation *homogène* (ou sans second membre) associée à (E) est

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0. \tag{E_0}$$

Le fait que la dérivation soit linéaire (c'est-à-dire que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées et que la dérivée du produit d'une constante et d'une fonction est le produit de la constante et de la dérivée de la fonction) donne une structure particulière aux solutions de (E_0).

Proposition 2.1.

Si y_1 et y_2 sont des solutions de (E_0) sur I, alors pour tous réels λ_1, λ_2, la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de (E_0).

Par ailleurs, la proposition suivante montre l'intérêt de l'équation homogène pour résoudre une équation différentielle avec second membre.

Proposition 2.2.

Toute solution de (E) est somme
- *d'une solution particulière de (E),*
- *d'une solution de l'équation homogène associée (E_0).*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si y est une solution quelconque de l'équation avec second membre (E) et y_{part} est une solution particulière de (E), alors $z = y - y_{\text{part}}$ est solution de l'équation homogène (E_0). □

Ainsi, on obtient une technique générale pour trouver *toutes* les solutions de (E) : il suffit d'exhiber une solution particulière de (E) et *toutes* les solutions de (E_0).

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Par tradition (et parce que les solutions vont être un peu plus simples à écrire), on « fait passer $a_0(t)$ à droite » et on écrit

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t). \tag{E}$$

I.1 Résolution

Commençons par trouver les solutions de l'équation homogène, qui est ici

$$y'(t) = a(t)y(t). \tag{E_0}$$

Théorème 2.3.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ sur I est l'ensemble des fonctions y_0 de la forme

$$y_0(t) = Ce^{A(t)}, \text{ pour } C \in \mathbb{R},$$

où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ sur I.

Démonstration. En effet, remarquons d'abord que cette fonction y_0 vérifie l'équation (E_0). On calcule $y_0'(t) = CA'(t)e^{A(t)} = Ca(t)e^{A(t)} = a(t)y_0(t)$ car $A(t)$ est une primitive de $a(t)$.

Réciproquement, soit $y(t)$ une solution de l'équation homogène (E_0) et définissons la fonction z par $z(t) = y(t)e^{-A(t)}$. Le but est de montrer que cette fonction est constante. Calculons

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(t)e^{-A(t)} - A'(t)y(t)e^{-A(t)}, \quad \text{(formule de dérivation du produit)} \\ &= a(t)y(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)}, \quad \text{(car } y \text{ est solution de l'équation homogène),} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction z est constante, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t, $z(t) = C$ et donc $y(t) = Ce^{A(t)}$. □

D'après la proposition (2.2), pour résoudre (E), il suffit donc de savoir calculer une primitive de $a(t)$ et de trouver une solution particulière de (E).

Exemple. $y'(t) = ty(t) + t$.

L'équation homogène associée est $y'(t) = ty(t)$, une primitive de t étant $\frac{t^2}{2}$, les solutions de l'équation homogène sont donc $y_0(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}}$, où $C \in \mathbb{R}$.

On remarque par ailleurs que $y_{\text{part}}(t) = -1$ est solution particulière de l'équation avec second membre, les solutions de l'équation sont donc les fonctions y de la forme

$$y(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}} - 1, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Toutefois, si on ne voit pas de solution particulière, on peut appliquer la méthode de variation de la constante.

I.2 Méthode de variation de la constante

Soit y_h une solution qui ne s'annule pas de l'équation homogène (E_0) (on peut prendre $y_h(t) = e^{A(t)}$). La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution de l'équation avec second membre (E) sous la forme $y(t) = c(t)y_h(t)$. Le but est donc de déterminer $c(t)$.

Pour ce faire, on calcule $y'(t)$ de deux façons différentes. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} y'(t) &= c'(t)y_h(t) + c(t)y_h'(t) \text{ par définition de } y(t), \\ &= c'(t)y_h(t) + c(t)a(t)y_h(t) \text{ car } y_h \text{ est solution de l'équation homogène.} \end{aligned}$$

Or $y(t)$ est solution de (E), donc

$$\begin{aligned} y'(t) &= a(t)y(t) + b(t), \\ &= a(t)c(t)y_h(t) + b(t) \text{ en remplaçant } y(t) \text{ par son expression.} \end{aligned}$$

En identifiant les deux expressions de $y'(t)$, on trouve $c'(t)y_h(t) = b(t)$. Comme y_h ne s'annule pas,

$$c'(t) = \frac{b(t)}{y_h(t)}.$$

Par conséquent, on trouve $c(t)$ en cherchant une primitive de $\frac{b(t)}{y_h(t)}$.

Exemple. Reprenons l'exemple du paragraphe du paragraphe précédent : $y'(t) = ty(t) + t$. Nous avons vu que les solutions de l'équation homogène associée $y'(t) = ty(t)$ sont de la forme $y_0(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}}$ où $C \in \mathbb{R}$. Si on ne voit pas de solution particulière, on peut appliquer la méthode de variation de la constante.

On suppose que $y(t) = c(t)e^{\frac{t^2}{2}}$ est solution de l'équation avec second membre. Alors, d'une part

$$\begin{aligned} y'(t) &= c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + c(t)te^{\frac{t^2}{2}}, \quad \text{(par définition de } y(t)\text{)} \\ &= c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + ty(t) \end{aligned}$$

et d'autre part, $y'(t) = ty(t) + t$ car y est solution de l'équation différentielle.

Ainsi, $c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + ty(t) = ty(t) + t$, donc $c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} = t$ et

$$c'(t) = \frac{t}{e^{\frac{t^2}{2}}} = te^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Pour déterminer $c(t)$, on trouve une primitive de $te^{-\frac{t^2}{2}}$, ainsi

$$c(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}} + k, \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation différentielle $y'(t) = ty(t) + t$ sont de la forme

$$y(t) = \left(-e^{-\frac{t^2}{2}} + k\right)e^{\frac{t^2}{2}} = -1 + ke^{\frac{t^2}{2}}, \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

I.3 Le problème de Cauchy linéaire d'ordre 1

Définition.

On appelle *problème de Cauchy* linéaire d'ordre 1 la conjonction d'une équation différentielle $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$. Résoudre le problème de Cauchy revient donc à trouver une solution y de l'équation différentielle telle que $y(t_0) = y_0$.

Théorème 2.4.

Le problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 *admet une unique solution.*

Quand on cherche à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, on trouve une famille de solutions dépendant du choix d'une constante. La condition initiale va imposer la valeur de cette constante et rendre la solution unique.

Exemple. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & ty(t) + t, \\ y(0) & = & 2 \end{array} \right. \tag{$\mathcal{P}$}$$

Nous avons vu (avec deux méthodes) que les solutions de l'équation différentielle $y'(t) = ty(t) + t$ sont les fonctions de la forme $y(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}} - 1$, où $C \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $y(0) = C - 1$ et si on impose $y(0) = 2$, alors $C = 3$.

Ainsi, *la* solution au problème de Cauchy ($\mathcal{P}$) est $y(t) = 3e^{\frac{t^2}{2}} - 1$.

I.4 Solutions particulières

On peut éviter d'appliquer la méthode de variation de la constante dans certains cas, le tableau suivant donne une technique pour rechercher une solution particulière en fonction du second membre $b(t)$ **si $\mathbf{a(t)}$ est une fonction constante** (c'est-à-dire ne dépendant pas de t).

forme de $b(t)$	forme de la solution particulière
polynôme de degré n	polynôme (a priori différent) de même degré n
e^{kt} qui n'est pas solution de l'équation homogène	Ae^{kt}, avec A réel à déterminer
e^{kt} qui est solution de l'équation homogène	Ate^{kt}, avec A réel à déterminer
$\sin(\omega t)$	$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$, avec A, B réels à déterminer
$\cos(\omega t)$	$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$, avec A, B réels à déterminer
somme de termes ci-dessus	somme des termes correspondants

Remarque. La technique s'applique toujours quand le second membre est le produit d'un nombre réel par un des termes ci-dessus, par exemple, pour un second membre $b(t) = \pi\sin(2t)$, on va aussi chercher une solution particulière sous la forme $A\sin(2t) + B\cos(2t)$.

II Équations différentielles d'ordre 2 linéaires à coefficients constants

On considère des équations d'ordre 2 plus simples que celles étudiées à l'ordre 1, on suppose en effet que les coefficients de y'', y' et y sont constants.

II.1 Théorie et notations

Soient a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$, on cherche une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I telle que pour tout $t \in I$,

$$ay''(t) + by'(t) + cy'(t) = f(t). \tag{E}$$

II.2 Résolution de l'équation homogène

L'équation homogène associée à (E) est

$$ay''(t) + by'(t) + cy'(t) = 0. \tag{E_0}$$

Pour résoudre (E_0), on utilise l'*équation caractéristique* associée

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \tag{$E.C.$}$$

qui est un trinôme du second degré (en λ).

La connaissance des racines de $(E.C.)$ va donner les solutions de l'équation homogène (E_0).

Rappel. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $(E.C.)$.

1. Si $\Delta < 0$, alors $(E.C.)$ admet deux racines complexes distinctes conjuguées
$$\lambda_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$
2. Si $\Delta = 0$, alors $(E.C.)$ admet une racine double réelle
$$\lambda = \frac{-b}{2a}.$$
3. Si $\Delta > 0$, alors $(E.C.)$ admet deux racines réelles distinctes
$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Proposition 2.5.

Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions $y_0(t)$ suivantes.

1. *Si $(E.C.)$ admet deux racines complexes distinctes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda = \alpha - i\beta$, alors*
$$y_0(t) = (A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t))\, e^{\alpha t}, \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
2. *Si $(E.C.)$ admet une racine réelle double λ, alors*
$$y(t) = (A + Bt)\, e^{\lambda t}, \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
3. *Si $(E.C.)$ admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, alors*
$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Exemple. $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0$.

L'équation caractéristique associée est $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Cette équation admet une racine réelle « double » $\lambda = 3$, donc les solutions de l'équation différentielle homogène sont de la forme
$$y(t) = (A + Bt)e^{3t}, \qquad \text{où } A, B \in \mathbb{R}.$$

II.3 Résolution de l'équation avec second membre

D'après la proposition 2.2, une solution de (E) est somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de l'équation homogène (E_0).

Exemple. $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 18$.

Une solution particulière de cette équation est $y_{\text{part}}(t) = 2$, on a trouvé les solutions de l'équation homogène dans l'exemple du paragraphe précédent, donc les solutions de cette équation sont de la forme
$$y(t) = (A + Bt)e^{3t} + 2, \qquad \text{où } A, B \in \mathbb{R}.$$

II.4 Problème de Cauchy

Définition.

Le *problème de Cauchy* linéaire à coefficients constants d'ordre 2 est la conjonction d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$ay''(t) + by'(t) + cy'(t) = f(t), \tag{E}$$

et de *deux* conditions initiales ($t_0 \in I, y_0, v_0 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} y(t_0) & = & y_0, \\ y'(t_0) & = & v_0. \end{cases} \tag{$\mathcal{C}$}$$

Résoudre le problème de Cauchy linéaire à coefficients constants d'ordre 2 revient donc à trouver une solution y de (E) vérifiant ($\mathcal{C}$).

Théorème 2.6.

Le problème de Cauchy linéaire à coefficients constants d'ordre 2 *admet une unique solution.*

Exemple. Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) & = & 18, \\ y(0) & = & 0, \\ y'(0) & = & 1. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

On a déjà trouvé les solutions de l'équation différentielle $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 18$, ce sont les fonctions de la forme

$$y(t) = (A + Bt)e^{3t} + 2, \qquad \text{où } A, B \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, $y(0) = A + 2$ et un calcul rapide montre que $y'(0) = B + 3A$. Par conséquent, les conditions initiales imposent que (A, B) soit solution du système

$$\begin{cases} A & & & = & -2, \\ 3A & + & B & = & 1. \end{cases}$$

Donc $A = -2$ et $B = 7$, et ainsi *la* solution de ($\mathcal{P}$) est

$$y(t) = (-2 + 7t)e^{3t} + 2.$$

Chapitre 3

Systèmes linéaires et matrices

I Systèmes linéaires

Étant donné deux entiers naturels n et p non nuls, on appelle système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tout système $(\mathcal{S})$ de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,p}x_p & = & b_i \\ \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S})$$

où $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une famille d'élément de $\mathbb{R}$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

On dit que $(\mathcal{S})$ est un système à n lignes et p colonnes, ou encore que $(\mathcal{S})$ est un système $n \times p$.

I.1 Systèmes 2×2

On considère ainsi un système de la forme

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}, \qquad (\mathcal{S}_2)$$

où les éléments a, b, c, d, e et f sont des nombres réels.

I.1.1 Cas diagonal

Le système $(\mathcal{S}_2)$ est dit *diagonal* si $b = 0$ et $c = 0$. En ce cas, et si $a \neq 0$ et $d \neq 0$, il admet pour solution $(x, y) = \left(\frac{e}{a}, \frac{f}{d}\right)$.

Exemple. Le système $\begin{cases} 3x = 4 \\ 2y = 5 \end{cases}$ est diagonal, il admet pour solution $(x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right)$.

I.1.2 Cas triangulaire

Le système $(\mathcal{S}_2)$ est dit *triangulaire* si $b = 0$ ou $c = 0$.

Exemple. Le système suivant est triangulaire :

$$\begin{cases} 2x \qquad = 3 & (L_1) \\ -10x + 4y = 1 & (L_2) \end{cases}. \tag{$\mathcal{T}_2$}$$

Pour le résoudre, on dispose de deux techniques principales.

1. On détermine une variable et on injecte sa valeur dans l'autre expression. Dans ($\mathcal{T}_2$), on voit facilement que $x = \frac{3}{2}$, en remplaçant x par sa valeur dans la seconde expression, on obtient $-10 \cdot \frac{3}{2} + 5y = 1$, donc $-15 + 4y = 1$, on en déduit $4y = 10$ et ainsi $y = 4$.

2. On peut chercher aussi à éliminer la première variable de la seconde équation par des combinaisons linéaires des lignes. En effet, en multipliant (L_1) par 5 et en l'ajoutant à (L_2), on obtient le système diagonal

$$\begin{cases} 2x \quad = 3 & (L_1) \\ \quad 4y = 16 & 5(L_1) + (L_2) \end{cases},$$

dont la solution est facilement $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

Remarque. On a traité sur l'exemple le cas $b = 0$, mais on peut raisonner de la même manière dès qu'un coefficient a, b, c ou d est nul.

I.1.3 Cas général

On suppose qu'aucun coefficient a, b, c ou d n'est nul dans le système ($\mathcal{S}_2$). On peut se ramener au cas triangulaire pour résoudre le système.

Exemple. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + \ \ y = 10 & (L_1) \\ -10x + 4y = 1 & (L_2) \end{cases}.$$

1. On peut déduire de (L_1) que $y = 10 - 4x$ et remplacer y par cette expression dans (L_2). On obtient $-10x + 4(10 - 4x) = 1$, ou encore $-26x = -39$, d'où $x = \frac{-39}{-26} = \frac{3}{2}$. Ensuite, on trouve que $y = 10 - 4\frac{3}{2} = 4$.

2. On peut aussi tenter d'éliminer une variable dans l'une ou l'autre des équations. Par exemple, on peut chercher à éliminer y dans (L_2) en calculant $(L_2) - 4(L_1)$:

$$\begin{cases} 4x + y = 10 & (L_1) \\ -26x \qquad = -39 & (L_2) - 4(L_1) \end{cases}$$

On peut alors trouver $x = \frac{-39}{-26} = \frac{3}{2}$ puis la valeur de y grâce à (L_1).

I.1.4 Structure des solutions et interprétation géométrique

Dans les exemples considérés, on arrivait toujours à trouver un unique couple (x, y) solution du système, cependant, ce n'est pas toujours le cas.

Exemple. Le système $\begin{cases} x+y=3 & (L_1) \\ 2x+y=6 & (L_2) \end{cases}$ admet une infinité de solutions. En effet, on peut remarquer que $(L_2) = 2(L_1)$, donc le système a pour solution l'ensemble des points de la droite D d'équation $y = -x + 3$.

Exemple. $\begin{cases} x-2y=2 & (L_1) \\ -2x+4y=5 & (L_2) \end{cases}$ n'a aucune solution. En effet si $x-2y=2$, alors $-2x+4y=-4$ et donc (L_1) et (L_2) ne peuvent être vérifiées simultanément.

Plus généralement, revenons au système

$$\begin{cases} ax+by=e & (L_1) \\ cx+dy=f & (L_2) \end{cases}. \qquad (\mathcal{S}_2)$$

La condition (L_1) est l'équation de droite D_1 dans le plan et (L_2) est l'équation de la droite D_2. Trois cas sont possibles.

- D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, elles se coupent alors en un unique point du plan, dont les coordonnées sont *la* solution du système ($\mathcal{S}_2$).
- D_1 et D_2 sont parallèles, non confondues, le système ($\mathcal{S}_2$) n'admet aucune solution.
- D_1 et D_2 sont confondues, le système ($\mathcal{S}_2$) admet une infinité de solutions : les points de la droite $D_1 = D_2$.

I.1.5 Déterminant et formules de Cramer

Il existe un outil pour savoir très rapidement si un système admet ou non une unique solution. On considère encore le système

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}. \qquad (\mathcal{S}_2)$$

Définition.

On appelle *déterminant* de ($\mathcal{S}_2$) le réel $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Proposition 3.1.

Le sytème ($\mathcal{S}_2$) admet une unique solution si et seulement si son déterminant est non nul.

En fait, on a même une expression pour la solution en ce cas.

Proposition 3.2 (Formules de Cramer).

Si le déterminant de $(\mathcal{S}_2)$ *est non nul, alors l'unique solution de* $(\mathcal{S}_2)$ *est donnée par*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad \textit{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Démonstration. Il s'agit d'une simple vérification, si on écrit $x = \frac{ed-bf}{ad-bc}$ et $y = \frac{af-ec}{ad-bc}$, alors

$$\begin{aligned} ax + by &= \frac{aed - abf + abf - bec}{ad - bc} = \frac{(ad-bc)e}{ad-bc} = e, \\ cx + dy &= \frac{ced - cbf + daf - dec}{ad - bc} = \frac{(ad-bc)f}{ad-bc} = f. \end{aligned}$$

□

I.2 Systèmes 3×3

On considère à présent des systèmes de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_3)$$

Pour un tel système, les techniques de « bricolage » pour trouver une solution sont déconseillées. En revanche, la méthode du pivot de Gauss est rapide et limite les risques d'erreur.

I.2.1 Méthode du pivot

Définition.

On dit que deux systèmes sont *équivalents* s'ils ont même ensemble de solutions (vide, fini ou infini).

À chaque étape de la méthode du pivot, le système traité sera équivalent au système de départ de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ & \vdots & & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,p}x_p & = & b_i & (L_i) \\ & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S})$$

Opérations élémentaires

Pour transformer $(\mathcal{S})$, on peut utiliser une des opérations élémentaires suivantes :

1. échange de deux lignes : $L_i \longleftrightarrow L_j$,
2. ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ avec $i \neq j$,
3. multiplication d'une ligne par un réel non nul : $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$,
4. modification de l'ordre des inconnues (en conservant les coefficients).

Théorème 3.3.

1. *Il existe un entier r tel que $1 \leqslant r \leqslant n$ et $1 \leqslant r \leqslant p$ tel que, par une suite finie d'opérations élémentaires, on obtienne un système équivalent à $(\mathcal{S})$ de n équations à p inconnues de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 x'_1 & + & *x'_2 & + & \cdots & + & *x'_r + *x'_{r+1} + \cdots + & *x'_p & = & \beta_1 \\ 0 & + & \alpha_2 x'_2 & + & \cdots & + & *x'_r + *x'_{r+1} + \cdots + & *x'_p & = & \beta_2 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & & \cdots & & 0 & + & \alpha_r x'_r + *x'_{r+1} + \cdots + & *x'_p & = & \beta_r \\ 0 & & \cdots & & 0 & & \cdots & 0 & = & \beta_{r+1} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 & & \cdots & 0 & = & \beta_n \end{array}\right. ,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \neq 0$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ et les inconnues $x'_1, x'_2, \cdots, x'_p$ sont les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ éventuellement écrites dans un ordre différent. L'entier r est appelé rang *du système.*

2. *Si $r < n$ et s'il existe un indice i_0 tel que $r < i_0 \leqslant n$ et $\beta_{i_0} \neq 0$, alors le système $(\mathcal{S})$ n'a pas de solution. Sinon, il a des solutions obtenues en choisissant arbitrairement les $p - r$ inconnues $x'_{r+1}, \ldots, x'_p$ et en calculant successivement dans cet ordre $x'_r, \ldots, x'_1$ grâce aux r premières équations.*

En pratique

Considérons le système suivant,

$$\begin{cases} \boxed{\text{x}} + 2y + 2z = 2 & L_1 \\ x + 2y - 2z = -1 & L_2 \\ 3x + 5y + 8z = 8 & L_3 \end{cases}$$

. Dans la première colonne, on cherche un coefficient non nul (le pivot) : ici, on peut prendre le coefficient $\alpha = 1$ de (L_1). On élimine alors les coefficients de x sur les lignes en-dessous en faisant l'opération élémentaire $L_j \longleftarrow L_j - \frac{\beta}{\alpha} L_1$ où β est le coefficient devant x sur la ligne L_j :

$$\begin{cases} x + \quad 2y + 2z = 2 & L_1 \\ \qquad\quad - 4z = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad \boxed{\text{-y}} + 2z = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} .$$

On se place alors sur la deuxième colonne, on cherche un coefficient non nul sur L_2 ou L_3, comme le coefficient de y est nul sur L_2, on échange L_2 et L_3 :

$$\begin{cases} x + \quad 2y + 2z = 2 & L_1 \\ \quad \boxed{\text{-y}} + 2z = 2 & L_2 \leftarrow L_3 \\ \qquad\quad - 4z = -3 & L_3 \leftarrow L_2 \end{cases} .$$

Il n'y aucun coefficient à éliminer sur L_3, on obtient la forme triangulaire décrite par le théorème 3.3. Comme les trois coefficients sur la diagonale sont non nuls, le système admet une unique solution.

$$\begin{cases} \boxed{\text{x}} + \quad 2y + \quad 2z = 2 & L_1 \\ \qquad \boxed{\text{-y}} + \quad 2z = 2 & L_2 \leftarrow L_3 \\ \qquad\qquad \boxed{\text{-4z}} = -3 & L_3 \leftarrow L_2 \end{cases}$$

Pour résoudre le système, on « remonte », on commence par éliminer les coefficients sur la troisième colonne :

$$\begin{cases} x + 2y \qquad = \frac{1}{2} & L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_3 \\ \quad - \quad y \qquad = \frac{1}{2} & L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2} L_3 \\ \qquad \boxed{\text{-4z}} = -3 & \end{cases} .$$

Il ne reste plus qu'à éliminer un coefficient pour rendre le système diagonal :

$$\begin{cases} x \qquad\qquad = \frac{3}{2} & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \boxed{\text{-y}} \qquad\quad = \frac{1}{2} & \\ \qquad - 4z = -3 & \end{cases} .$$

Il est alors facile de voir que le système admet une unique solution :

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right).$$

Remarque. La méthode peut aussi être appliquée pour un système 2×3. Considérons par exemple le système suivant :

$$\begin{cases} \boxed{\text{3x}} - 6y + 9z = 36 \\ -2x + \ \ y - 3z = 6 \end{cases}.$$

En réduisant, on trouve

$$\begin{cases} \boxed{\text{3x}} - 6y + 9z = 36 & \\ \qquad - 3y + 3z = 30 & \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_1 \end{cases}.$$

On peut rendre les coefficients diagonaux égaux à 1 :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 12 & \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ \ \ - \ \ y + \ \ z = 10 & \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \end{cases}.$$

La variable z peut (par exemple) être choisie librement, alors $y = z - 10$ et $x = 12 + 2(z - 10) - 3z = -8 - z$, donc les solutions du systèmes sont les points (x, y, z) tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions est donc une droite affine dans l'espace (donnée par un point auquel on ajoute les multiples d'un vecteur directeur).

I.2.2 Structure des solutions

On considère un système 3×3 de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases} \tag{$\mathcal{S}_3$}$$

Chaque ligne de $(\mathcal{S}_3)$ est l'équation d'un plan (affine) dans l'espace (affine) $\mathbb{R}^3$. Les solutions de ce système correspondent donc à l'intersection de ces plans.

II Matrices

II.1 Opérations sur les matrices

Dans cette partie, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

II.1.1 Définition

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ un tableau de np nombres réels rangés en n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On écrit encore $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. On dit aussi que A est une matrice $n \times p$, ou que les dimensions de A sont (n, p).

II.1.2 Terminologie

1. On appelle
   - j^{e} vecteur colonne de A le vecteur $(a_{1,j}, a_{2,j}, \cdots, a_{n,j})$ de $\mathbb{R}^n$,
   - i^{e} vecteur de ligne de A le vecteur $(a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,p})$ de $\mathbb{R}^p$.
2. Si $n = p$, on dit que A est une matrice *carrée*, on peut la noter $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
3. Si $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne (ou un vecteur colonne). On peut alors identifier $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ avec le vecteur $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
4. Si $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne (ou un vecteur ligne).
5. Si A est une matrice carrée, on dit qu'elle est diagonale si les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls si

$i \neq j$, c'est-à-dire si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice se note $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. La matrice $\operatorname{diag}(1, 1, \cdots, 1)$ est appelée *matrice identité* et est notée I_n.

6. Étant donné une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, on appelle matrice *transposée* de A la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes, c'est-à-dire

$$^{\mathrm{t}}A = (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$$

Exemples.

– Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, alors $^{\mathrm{t}}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

– En transposant un vecteur ligne, on obtient un vecteur colonne ; en transposant un vecteur colonne, on obtient un vecteur ligne.

– Pour toute matrice A, $^{\mathrm{t}}\left(^{\mathrm{t}}A\right) = A$.

II.1.3 Addition de matrices

Si deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ont les mêmes dimensions, on définit la matrice $A + B$ en faisant l'addition coefficient par coefficient :

$$A + B = B + A = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,j} + b_{1,j} & \cdots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,j} + b_{2,j} & \cdots & a_{2,p} + b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} + b_{i,1} & a_{i,2} + b_{i,2} & \cdots & a_{i,j} + b_{i,j} & \cdots & a_{i,p} + b_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & \cdots & a_{n,j} + b_{n,j} & \cdots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Si on note 0 la matrice de mêmes dimensions dont tous les coefficients sont nuls, alors $A + 0 = 0 + A = A$.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

II.1.4 Multiplication par un nombre réel

Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ donnée et un réel λ, on définit la matrice λA par

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,j} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,j} & \cdots & \lambda a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i,1} & \lambda a_{i,2} & \cdots & \lambda a_{i,j} & \cdots & \lambda a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \cdots & \lambda a_{n,j} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

II.1.5 Produit matriciel

La multiplication de deux matrices « terme à terme » n'est pas très intéressante, on considère donc un produit un peu plus compliqué.

Tout d'abord, pour avoir le droit de considérer le produit AB, les dimensions de $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ doivent être *compatibles*, c'est-à-dire $n = p$.

En ce cas, la matrice $AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ sera une matrice à m lignes et q colonnes définie par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Exemple. Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, on ne peut pas calculer BA (les dimensions sont incompatibles), mais on peut calculer AB qui est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes.

Pour mieux visualiser la technique pour calculer le produit matriciel, on peut procéder comme dans la figure II.1. Ainsi, le coefficient $c_{1,1}$ est obtenu par

$$c_{1,1} = 0 \times 1 + 1 \times 5 + 2 \times 9 = 23.$$

De même, on trouve les autres coefficients :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 23 & 26 & 29 & 32 \\ 38 & 46 & 50 & 56 \\ 53 & 62 & 71 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

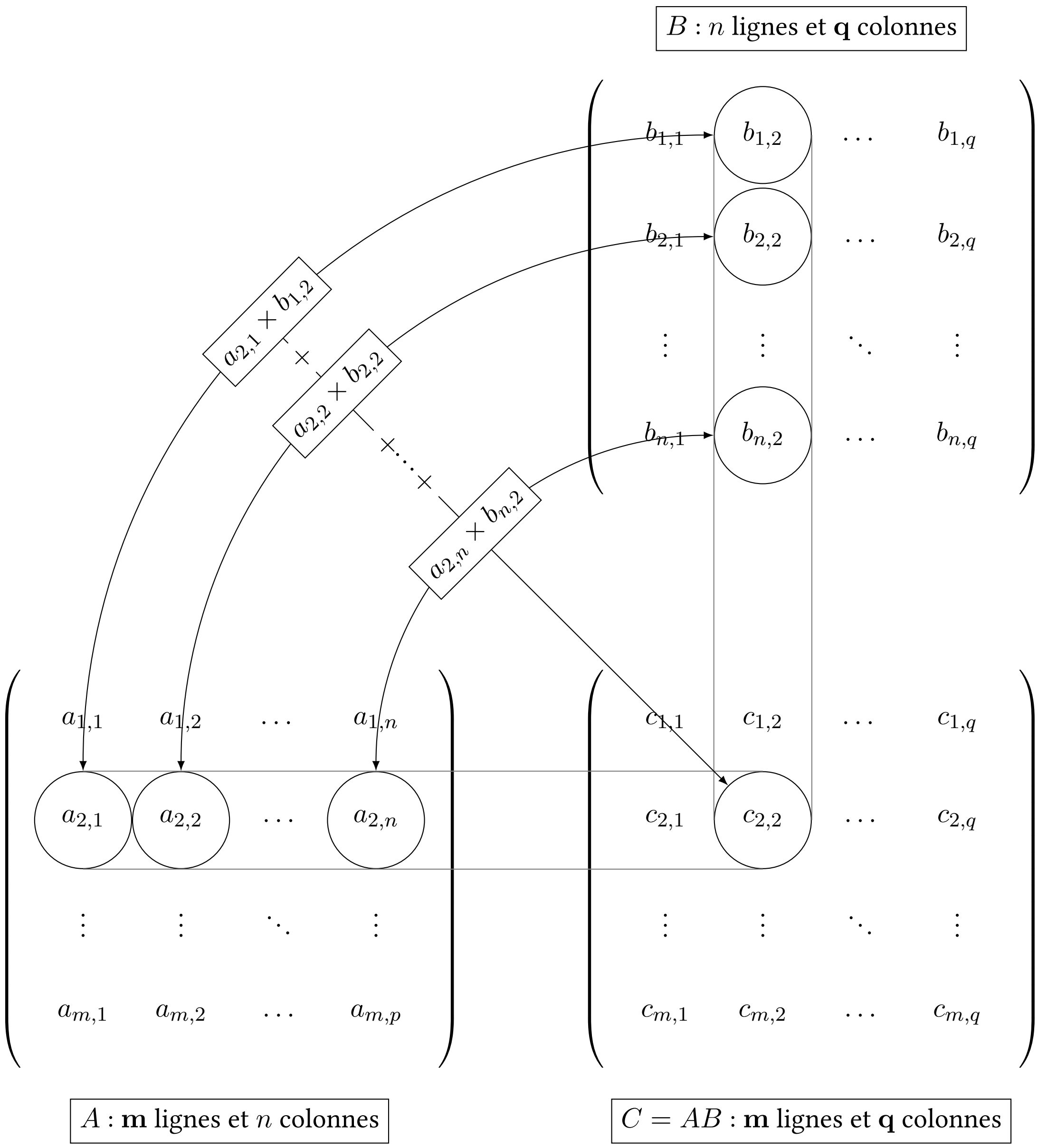


FIGURE II.1 – Illustration du produit matriciel.
Cette figure a été construite par Alain Matthes, `http://www.altermundus.fr`.

Ainsi, $AB = \begin{pmatrix} 23 & 26 & 29 & 32 \\ 38 & 46 & 50 & 56 \\ 53 & 62 & 71 & 80 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.4.

Le produit matriciel est associatif, *c'est-à-dire que pour toutes matrices* A,B *et* C *aux dimensions compatibles,*

$$A(BC) = (AB)C.$$

Ainsi, on peut écrire des produits matriciels successifs sans parenthèses.

Remarques. Le produit matriciel n'a pas toutes les propriétés du produit des nombres réels.

1. Si A et B sont deux matrices carrées de même taille (n, n), les produits AB et BA sont définis mais ne sont pas forcément égaux. Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 20 \\ 20 & 38 & 56 \\ 32 & 62 & 92 \end{pmatrix} \qquad \neq \qquad BA = \begin{pmatrix} 23 & 26 & 29 \\ 38 & 44 & 50 \\ 53 & 62 & 71 \end{pmatrix}.$$

2. On peut avoir $AB = 0$, mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$. C'est le cas par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

II.2 Liens avec les systèmes

Si A est une matrice carrée à n lignes et n colonnes, et X est un vecteur colonne, alors AX est aussi un vecteur colonne. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors chercher à trouver X tel que $AX = b$ revient à résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 3 \\ -x + 2y + 3z & = -1 \\ 4x \qquad + \; z & = 1 \end{cases}$$

Si on considère une équation de la forme $ax = b$, où a et b sont des nombres réels, avec $a \neq 0$, alors la solution est $x = a^{-1}b$. On va définir un inverse pour les matrices carrées pour procéder de même.

Définition.

Une matrice carrée A à n lignes et n colonnes est inversible s'il existe une matrice carrée B à n lignes et n colonnes telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Une matrice B vérifiant la relation ci-dessus est nécessairement unique, elle s'appelle *inverse* de B et est notée A^{-1}.

Proposition 3.5.

Une matrice A carrée à n lignes et n colonnes est inversible si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée.

1. *Il existe une matrice carrée B à n lignes et n colonnes telle que $AB = I_n$.*
2. *Il existe une matrice carrée B à n lignes et n colonnes telle que $BA = I_n$.*
3. *Pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$, $AX = 0$ implique $X = 0$.*

Nous allons à présent voir comment inverser une matrice inversible dans le cas des matrices 2×2 et 3×3.

II.2.1 Matrices 2×2

On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à deux lignes et deux colonnes.

Proposition 3.6.

A est inversible si et seulement si son déterminant $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ *est non nul.*

En ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Cette propriété est en fait une reformulation des formules de Cramer avec le vocabulaire des matrices (proposition 3.2).

Pour la preuve, calculons

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A) I_2$$

$\square$

II.2.2 Matrices 3×3

Pour les matrice 3×3, on applique la méthode du pivot de Gauss. La technique générale va être décrite sur un exemple. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On écrit côte à côte les matrices A et I_3, on va faire des opérations élémentaires sur (les lignes de) A pour obtenir la matrice I_3 et on va faire les mêmes opérations sur (les lignes de) la matrice I_n. On obtiendra alors la matrice A^{-1}.

1. $\begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{2}{5} L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow \frac{5}{11} L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + 3L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{15}{11} & \frac{10}{11} & -\frac{10}{11} \\ -\frac{6}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{15}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftarrow \frac{1}{5} L_1 \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{6}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{15}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$

On obtient donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{6}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{15}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 15 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Pour vérifier, on peut multiplier le résultat obtenu par A et voir si on trouve effectivement $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.