Feuille de TD n°2

Formules de Taylor

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^x - 2xe^x + e^x + 3$. Appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 1. En déduire que f admet un minimum local en 1.

Exercice 2

Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre 2 à $\cos(x)$. En déduire que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

Développements limités

Exercice 3

Calculer les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos\left(\pi x^2 + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f_2(x) = \sqrt{1 + x + x^2}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x} - x, \qquad f_4(x) = \cos(x^3 + x^2).$$

Exercice 4

Calculer les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 1 des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{e^{x-1} + 2}, \qquad g_2(x) = \sqrt{x + x^2}, \qquad g_3(x) = \frac{\cos(x-1)}{x}, \qquad g_4(x) = x^3e^x - 3x^2e^x + 3xe^x - e^x.$$

* Exercice 5

Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Trouver la limite de f en 0. Donner un développement limité à l'ordre 1 de f en 0.

Fonctions de deux variables

Exercice 6

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$. Trouver les points critiques de f, préciser s'il s'agit d'extrema locaux.

Exercice 7

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = x + e^x y - y$. Trouver les points critiques de f. Préciser s'il s'agit d'extrema locaux.

Exercice 8

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{1} \frac{e^{-y}}{x\sqrt{x}}dxdy.$

* Exercice 9

Soient $X > 0$ et

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant X^2\right\} \qquad \text{et} \qquad \Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ -X \leqslant x \leqslant X \text{ et } -X \leqslant y \leqslant X\right\}.$$

1. Calculer $I(X) = \displaystyle\iint_D e^{-x^2+y^2}\,dxdy$.
2. Soit $J(X) = \displaystyle\iint_\Delta e^{-x^2+y^2}\,dxdy$. Utiliser I pour donner un encadrement de $J(X)$.
3. En déduire $\lim_{X\to+\infty} J(X)$.

* Exercice 10 Gradient

Soit un réel q *fixé*, pour tout point M de coordonnées (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$, on définit $f(M) = \frac{q}{r}$ où $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

1. Exprimer f comme une fonction de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{\nabla} f(x, y) = -\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$.