Test n^{o}2 – correction

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $y'(x) - 2y(x) = 4\sin(2x) \qquad (E_1)$.

1. Donner les solutions de l'équation homogène $y'(x) - 2y(x) = 0$.
   Les solutions de cette équation sont de la forme $y_0(x) = Ce^{2x}$ où C est une constante réelle.
2. Trouver une solution particulière de (E_1).
   Étant donné la forme du second membre $b(x) = 4\sin(2x)$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_{\text{part}}(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$ à déterminer. Pour ce faire, on calcule
   $$y'_{\text{part}}(x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x),$$
   par conséquent, $y'_{\text{part}}(x) - 2y_{\text{part}}(x) = (-2A - 2B)\sin(2x) + (2A - 2B)\cos(2x)$. Comme $y_{\text{part}}(x)$ est solution de (E_1), le couple (A, B) est solution du système
   $$\begin{cases} -2A & -2B = 4 \\ 2A & -2B = 0 \end{cases},$$
   donc $(A, B) = (-1, -1)$ et
   $$y_{\text{part}}(x) = -\sin(2x) - \cos(2x).$$
3. Donner toutes les solutions de (E_1), puis déterminer l'unique solution y de (E_1) telle que $y(0) = 2$.
   Les solutions de (E_1) sont obtenues en additionnant une solution particulière de (E_1) et une solution de l'équation homogène, donc toute solution de (E_1) est de la forme
   $$y(x) = -\sin(2x) - \cos(2x) + Ce^{2x}.$$
   Si on impose $y(0) = 2$, alors comme $y(0) = -1 + C$, cela implique $C = 3$ et donc
   $$y(x) = -\sin(2x) - \cos(2x) + 3e^{2x}.$$

Exercice 2

Soit l'équation différentielle $y'(x) + xy(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (E_2)$.

1. Donner l'équation homogène (sans second membre) associée à (E_2), la résoudre.
   L'équation homogène associée est $y'(x) + xy(x) = 0$, dont les solutions sont $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$, pour $C \in \mathbb{R}$, car $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ est une primitive de $a(x) = -x$.
2. En déduire toutes les solutions de (E_2).
   Pour trouver ces solutions, on applique la méthode de variation de la constante. On suppose ainsi que $y(x) = c(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est solution de (E_2), alors
   $$y'(x) = c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - c(x)xe^{-\frac{x^2}{2}} = c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xy(x).$$
   Donc $y'(x) + xy(x) = c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, mais y est solution de (E_2), donc $y'(x) + xy(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, et on retrouve ainsi la formule (qu'on pouvait aussi écrire directement)
   $$c'(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = 1.$$
   D'où $c(x) = x + k$, où $k \in \mathbb{R}$, et $y(x) = (x + k) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{x^2+1} \cdot (4x^2 - 4x + 3) \qquad (E_3)$.

1. Donner l'équation homogène (sans second membre) associée à (E_3), la résoudre.
   L'équation homogène associée à (E_3) est $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$. Pour la résoudre, on considère l'équation caractéristique
   $$\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = 0,$$
   qui admet une racine réelle « double » $\lambda = 1$.
   Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme
   $$y_0(x) = (A + Bx)e^x, \qquad \text{où } A, B \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que $f(x) = e^{x^2+1}$ est solution particulière de l'équation différentielle (E_3).
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
   $$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2+1}.$$
   Ainsi, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
   $$f''(x) = 2e^{x^2+1} + 4x^2e^{x^2+1} = e^{x^2+1} \cdot (4x^2 + 2).$$
   Par conséquent,
   $$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^{x^2+1} \cdot (4x^2 + 2 - 4x + 1) = e^{x^2+1} \cdot (4x^2 - 4x + 3),$$
   ce qui montre que f est une solution de (E_3).
   Remarque. Cela implique que les solutions de (E_3) sont
   $$y(x) = e^{x^2+1} + (A + Bx) \cdot e^x, \qquad \text{où } A, B \in \mathbb{R}.$$