Feuille de TD n°3

Groupes (suite)

Exercice 1
On munit l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ de la loi interne $\otimes$ définie par la formule

$$x \otimes y = xy + x + y.$$

Il est montré dans l'exercice 3 de la feuille de TD n°2 que $(I, \otimes)$ est un groupe. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & e^x - 1 \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 2
Montrer qu'un groupe qui n'a qu'un nombre fini de sous-groupes est fini.

Exercice 3
Trouver tous les morphismes du groupe additif $\mathbb{Q}$ dans lui-même. Même question pour les morphismes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4
Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^2 \end{array} \right.$. Montrer que f est un morphisme de groupes si et seulement si G est abélien.

Exercice 5
Soient R_0 l'ensemble des rotations du plan réel de centre 0 et $\mathbb{S}^1$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que les groupes $(R_0, \circ)$ et $(\mathbb{S}^1, \times)$ sont isomorphes.

Exercice 6
Soit G le produit direct de $\left(\mathbb{R}_+^\star, \times\right)$ et de $(\{\pm 1\}, \times)$. Montrer que G est isomorphe à $(\mathbb{R}^\star, \times)$.

Exercice 7
Soit G un groupe cyclique engendré par un élément g. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G.

1. Montrer que l'application $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{End}(G) & \longrightarrow & G \\ f & \longmapsto & f(g) \end{array} \right.$ est une bijection.
2. Soit $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.
   a) Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe.
   b) Soit $f \in \mathrm{End}(G)$. Montrer que $f \in \mathrm{Aut}(G)$ si et seulement si $\psi(f)$ est un générateur de G.
3. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

Exercice 8
1. Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.
2. Montrer plus généralement que $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphes si et seulement si m et n sont premiers entre eux.

Ordres (groupes)

Exercice 9
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $s_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la surjection canonique.

On note $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et on considère l'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (s_2(x), s_6(x)) \end{array} \right.$.

1. Montrer que s est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau. Ce morphisme est-il surjectif ?
2. Déterminer les sous-groupes d'ordre 2 de G.
3. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $s^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui contient $6\mathbb{Z}$. Déterminer $s^{-1}(H)$ et $s\left(s^{-1}(H)\right)$ lorsque $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\}$.

Exercice 10

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et x, y des éléments de G.

1. On suppose que xy est d'ordre fini. Que peut-on dire de yx ?
2. Donner un exemple où x et y sont d'ordre fini, mais pas xy.

Exercice 11

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{N}$. Quel est l'ordre de a dans le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Exercice 12

Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini et K, H deux sous-groupes de G de cardinaux premiers entre eux. Que peut-on dire de $K \cap H$?

Exercice 13

1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe tel que pour tout $x \in G$, x^2 est l'élément neutre de G. Montrer que G est abélien.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p est cyclique.
3. Montrer que tout groupe d'ordre inférieur à 5 est abélien.