Feuille de TD n°4

Classes et théorème de Lagrange

Exercice 1 nombres de Mersenne.
Soit n un entier supérieur à 3.

1. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n l'est aussi.
2. Supposons n premier. Soit p un diviseur premier de $2^n - 1$. Prouver que $2n$ divise $p - 1$.
   Indication : on pourra considérer l'ordre de $\overline{2}$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$.
3. L'entier n peut-il être premier sans que $2^n - 1$ le soit ?

Exercice 2
Soit $H = \{\sigma \in S_n,\, \sigma(n) = n\}$.

1. Montrer que H est un sous-groupe de S_n.
2. Trouver un ensemble T tel que S_n soit l'union disjointe des Hx pour $x \in T$.

Exercice 3

1. On note $\mathbf{GL}(2,\mathbb{Z})$ les matrices 2×2 à coefficients entiers inversibles (dont les coefficients de l'inverse sont entiers). Soit $A \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{Z})$, que peut-on dire de $\det A$?
2. On note $\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ les matrices de $\mathbf{GL}(2,\mathbb{Z})$ de déterminant 1. Déterminer $[\mathbf{GL}(2,\mathbb{Z}) : \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})]$.

Sous-groupes distingués et quotients

Exercice 4
Soient $G = S_3$, $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

1. Donner l'ordre de σ et de τ. Montrer que σ et τ engendrent G.
2. Soit H le sous-groupe de G engendré par τ, montrer que H est distingué dans G.

Exercice 5
Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice 2 dans G. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 6
Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G.

1. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que HN est un sous-groupe de G.
2. On suppose désormais que G est fini, que les ordres de N et G/N sont premiers entre eux et que H a même ordre que G/N. Montrer que $G = HN$.
3. Soit f un endomorphisme de G. Montrer que $f(N) \subseteq N$.

Exercice 7
Soient $G = \left\{\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ y & x\end{pmatrix},\, x \in \mathbb{C}^*,\, y \in \mathbb{C}\right\}$ et $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1\end{pmatrix},\ y \in \mathbb{C}\right\}$.

1. Vérifier que G est un groupe.
2. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.
3. Prouver que les groupes G/H et $\mathbb{C}^*$ sont isomorphes.

Exercice 8
Soit $(G,\cdot)$ un groupe. On définit le centre de G comme $Z(G) = \{a \in G,\, \forall x \in G,\, ax = xa\}$.

1. Montrer que $(Z(G),\cdot)$ est un groupe abélien.

2. On définit une application i de $(G, \cdot)$ dans $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ de la manière suivante : si $a \in G$, alors

$$i(a) : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array} \right. .$$

   Montrer que i est bien définie, que c'est un morphisme de groupes. L'image de i notée $\mathrm{Int}(G)$ est le groupe des automorphismes intérieurs de G.
3. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
4. Trouver une réalisation pratique du quotient $(G/Z(G), \cdot)$.
5. Ce groupe quotient est-il toujours abélien ?
6. Soit $(H, \cdot)$ un sous-groupe de $(G, \cdot)$ contenu dans $(Z(G), \cdot)$. Montrer que si le groupe quotient $(G/H, \cdot)$ est monogène, alors $(G, \cdot)$ est abélien.
7. Déterminer le centre de S_3.

Exercice 9

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour g_1 et g_2 appartenant à G, on définit leur commutateur par

$$[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}.$$

Soit $(D(G), \cdot)$ le groupe endendré par les commutateurs de G. On l'appelle groupe dérivé de G.

1. Montrer que $(D(G), \cdot)$ est un sous-groupe distingué de $(G, \cdot)$.
2. Soit $(H, \cdot)$ un sous-groupe de $(G, \cdot)$. Montrer que

$$(H \text{ est distingué dans } G \text{ et } G/H \text{ est abélien}) \Longleftrightarrow (H \supseteq D(G)).$$

3. Déterminer $D(S_3)$.

Exercice 10

Soient G et H des groupes, et $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que si L est un sous-groupe distingué de H, alors $f^{-1}(L)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que si K est un sous-groupe distingué de G et f est surjective, alors $f(K)$ est un sous-groupe distingué de H. Qu'en est-il si f n'est pas surjective ?
3. Soit a un élément d'ordre 2 de G. Montrer que $\langle a \rangle$ est un sous-groupe distingué de G si et seulement si a est dans le centre de G.
4. En déduire que $\langle \tau_{1,2} \rangle$ n'est pas un sous-groupe distingué de $(\mathfrak{S}_3, \circ)$.

Exercice 11 normalisateur.

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On note N l'ensemble des $g \in G$ tels que $gHg^{-1} = H$.

1. Vérifier que N est un sous-groupe de G contenant H et que H est distingué dans N.
2. Soit K un sous-groupe de G contenant H. Montrer que $K \subseteq N$ si et seulement si H est distingué dans K.

Exercice 12

Soient $d \in \mathbb{N}^\star$ et G un groupe fini. On désigne par X l'ensemble des $g \in G$ tels que $g^d = 1$. Soit H un sous-groupe distingué de G.

1. La partie X est-elle un sous-groupe de G ?
2. Montrer que si $[G : H]$ et d sont premiers entre eux, alors $X \subseteq H$.