Feuilletages totalement géodésiques, flots riemanniens et variétés de Seifert.

Pierre Mounoud*†

Résumé

Nous étudions les feuilletages lisses totalement géodésiques de codimension 1 des variétés lorentziennes. Nous nous intéressons notamment aux relations entre les flots riemanniens et les feuilletages géodésiques. Nous prouvons que, quitte à prendre un revêtement d'ordre 2, tout fibré de Seifert possède un tel feuilletage.

Abstract

We study totally geodesic codimension 1 smooth foliations on Lorentzian manifolds. We are in particular interested in the relations between riemannian flows and geodesic foliations. We prove that, up to a 2-cover, any Seifert bundle admits such a foliation.

1 Introduction.

Dans cet article, nous nous sommes intéressés aux feuilletages totalement géodésiques lisses de codimension 1 des variétés lorentziennes. Ces feuilletages ont été étudiés auparavant par A. Zeghib (voir [Ze1]) dans le cas où les feuilles sont de type lumière, par C. Boubel, C. Tarquini et l'auteur (voir [B-M-T]) dans le cas où les feuilles sont toutes de type temps et par K. Yokumoto (voir [Yo]) dans le cas mixte c'est-à-dire avec des feuilles de différents types. Remarquons aussi que lorsque les feuilles sont de type espace, ces feuilletages sont exactement les feuilletages totalement géodésiques riemanniens (cf. proposition 3.1) qui, dans le cas des variétés complètes de dimension 3 ont été étudiés par Y. Carrière et É. Ghys dans [C-G]. Notons aussi que les résultats de ces trois articles concernent presque exclusivement les variétés compactes de dimension 3.

Le but de cet article est de voir quelles sont les variétés de Seifert ou les fibrés en cercles qui admettent de tels feuilletages et ceci sous diverses conditions que l'on imposera. Ainsi dans la partie 3, on rappelle ce qu'il en est, en dimension 3, si on impose aux feuilles d'être toutes non dégénérées. Dans la partie 4, on s'intéresse aux feuilletages totalement géodésiques de type lumière des variétés de dimension 3. Nous faisons alors la remarque suivante (bien connue) : un feuilletage $\mathcal{F}$ de type lumière et de codimension 1 contient son orthogonal. On en déduit que la classe d'Euler du fibré tangent à $\mathcal{F}$ est nulle. Cela nous permet de montrer, avec la classification des variétés de dimension 3 possédant un feuilletage lisse dont les feuilles sont des plans des cylindres et des tores (théorème 2), le principal résultat de cette section :

*Université d'Avignon, laboratoire d'analyse non linéaire et géométrie, 33 rue Louis Pasteur, 84000 Avignon, France. Courriel : pierre.mounoud@univ-avignon.fr

†Classification mathématique par sujet (2000) : 57R30 ; 53C50

Théorème 3 *Un fibré en cercle orientable M sur une surface orientable Σ de genre $g > 1$ compacte et de nombre d'Euler* $\mathrm{eul}(M)$ *possède un feuilletage de codimension* 1 *lisse totalement géodésique et de type lumière si et seulement si* $\mathrm{eul}(M)$ *divise* $2g-2$.

Finalement dans la partie 5, on regarde le cas général avec des feuilles de tout types. Nous nous restreignons en fait au cas où les feuilles de type lumière sont compactes et en nombre fini. Tout d'abord nous cherchons à répondre à la question suivante :
«étant donné un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 et un flot riemannien ϕ quelle position relative de $\mathcal{F}$ et de ϕ permet de conclure qu'il existe une métrique lorentzienne g telle que $\mathcal{F}$ est totalement géodésique et que $\mathcal{F}$ et ϕ sont orthogonaux pour g ?»

Précisons que la présence d'un feuilletage totalement géodésique lorentzien de codimension 1 n'implique pas forcément celle d'un flot riemannien sur toute la variété (mais voir proposition 5.4).

Naturellement pour chaque feuille F de $\mathcal{F}$, ϕ devra être soit partout transverse soit partout tangent à F, selon que la feuille devienne de type lumière ou non. Cependant cette condition est loin d'être suffisante. Le théorème 5 répond à la question, avec la restriction indiquée sur les feuilles de type lumière, et donne des conditions nécessaires et suffisantes. Ces conditions portent sur les positions relatives de $\mathcal{F}$ et ϕ et sont assez techniques. Nous renvoyons le lecteur à la section 5 pour un énoncé exact de ce résultat. Nous donnons tout de même ici une idée de celles-ci. D'une part il y a une hypothèse d'invariance faible de $\mathcal{F}$ dans la direction de ϕ (cf. définition 5.6 et proposition 5.7) au voisinage des feuilles de tangences entre les deux feuilletages. D'autre part il y a une hypothèse reliant les propriétés transverses de ϕ et la répartition des feuilles de tangences de $\mathcal{F}$ (cf. définition 5.9 et proposition 5.8). En particulier le flot ϕ devra être lorentzien sur certains ouverts de la variété.

Malgrès les difficultés et les restrictions, le théorème 5 permet de répondre à notre question initiale et nous prouvons :

Théorème 6 *Quitte à prendre un revêtement à* 2 *feuillets, tout fibré de Seifert de dimension* 3 *possède un feuilletage totalement géodésique.*

Ceci comprend les exemples construit par K. Yokumoto dans [Yo]. En fait nous montrons que toute variété de dimension 3 possédant un flot riemannien transversalement orientable possède un feuilletage totalement géodésique. En dimension supérieure la situation se complique, la démonstration en dimension 3 utilise de façon essentielle le fait que les fibres singulières sont isolées ce qui n'est plus vrai en dimension plus grande. On obtient toutefois :

Théorème 7 *Tout fibré en cercle orientable possède un feuilletage totalement géodésique mixte de codimension* 1.

En particulier les sphères de dimension impaire possèdent donc des feuilletages totalement géodésiques.

2 Définitions

Dans cette section nous allons définir certains termes que nous utiliserons dans la suite et que nous avons classés par domaine. Précisons que les variétés considérées dans la suite seront toujours (sauf précision contraire) connexes et sans bord et bien souvent compactes.

2.1 Géométrie lorentzienne.

Définition 2.1 *Soit (M, g) une variété lorentzienne. Un sous-espace vectoriel non nul E du tangent en un point x de M, noté T_xM, sera dit de type espace (resp. temps) (resp. lumière) si la restriction de g à E est riemannienne (resp. lorentzienne ou définie négative) (resp. dégénérée).*

Par extension, on dira qu'une sous-variété S de M est de type espace (resp. temps ou lumière) si en tout point x de S, on a T_xS est de type espace (resp. temps ou lumière).

Définissons maintenant ce qui constitue le cœur de cet article.

Définition 2.2 *Soit (M, g) une variété (pseudo-)riemannienne. Une sous-variété S de M est dite* totalement géodésique *si toute géodésique de g tangente à S en un point est tangente à S partout.*

Nous dirons qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ de M est totalement géodésique (pour la métrique g) si toute feuille de $\mathcal{F}$ est une sous-variété totalement géodésique de (M, g).

Si on considère une sous-variété S connexe et totalement géodésique de (M, g), le tangent à S est invariant par transport parallèle le long des courbes tangentes à S. Le tangent à S est donc en tout point du même type, S est soit de type espace, soit de type temps, soit de type lumière. Par contre les feuilles d'un feuilletage totalement géodésique n'ont aucune raison d'être toutes du même type.

2.2 Feuilletages riemanniens.

Dans la partie 5, il est question de flots riemanniens et de flots lorentziens. Précisons que l'on appellera "flot" un feuilletage de dimension 1 orienté, sans notion de paramétrage. Lorsqu'un flot sera paramétré cela sera toujours explicitement précisé. Nous donnons ici la définition d'un feuilletage riemannien mais le lecteur est invité à consulter le livre de P. Molino [Mol] et l'article d'Y. Carrière [Ca] consacré aux flots riemanniens pour plus de détails.

Définition 2.3 *Un feuilletage ϕ sur une variété M est dit (transversalement) riemannien (resp. lorentzien) s'il existe une métrique riemannienne (resp. lorentzienne) $\bar{\gamma}$ sur $\nu(\phi)$, le fibré normal de ϕ, invariante sous l'action du pseudo-groupe d'holonomie de ϕ. Une telle métrique est dite transverse.*
Une métrique de M, γ, pseudo-riemannienne sera dite quasi-fibrée (par rapport à ϕ) si la métrique $\bar{\gamma}$ induite par γ sur $\nu(\phi)$ est non dégénérée et invariante sous l'action du pseudo-groupe d'holonomie de ϕ.

Nous allons aussi utiliser la notion de champ de vecteurs basique d'un feuilletage.

Définition 2.4 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété M. Le champ de vecteurs X est dit basique pour $\mathcal{F}$ si pour tout champ de vecteurs Y tangent à $\mathcal{F}$ on a $[X, Y]$ tangent à $\mathcal{F}$.*

2.3 Fibrés de Seifert.

Nous appellerons fibré de Seifert (ou variété de Seifert) une variété M de dimension quelconque munie d'un feuilletage riemannien de dimension 1 transversalement orientable dont toutes les feuilles sont fermées.

La situation est particulièrement agréable lorsque M est de dimension 3 car les feuilles ayant de l'holonomie sont alors isolées. C'est une conséquence directe du fait qu'une isométrie directe euclidienne de $\mathbb{R}^2$ différente de l'identité a un unique point fixe. Ces feuilles sont appelées les fibres exceptionnelles. La proposition II.C.3 de [Ca] donne la description d'un flot riemannien au voisinage de l'adhérence d'une feuille. Si toutes les feuilles sont compactes le feuilletage y est difféomorphe à celui obtenu sur un tore solide par suspension au dessus d'un disque centré en zéro d'une rotation R d'ordre fini (d'angle rationnel) c'est-à-dire au le feuilletage donné par $D^2 \times [0,1]/(x,0) \sim (R(x),1)$. Le feuilletage privé de ses feuilles exceptionnelles est donné par une fibration localement triviale. On retrouve la définition usuelle des fibrés de Seifert. Le feuilletage est vu comme une fibration (non localement triviale) au dessus de l'espace des feuilles qui n'est pas une variété mais un orbifold.

On considére parfois aussi les feuilletages riemanniens non transversalement orientables, les fibres exceptionnelles ne sont plus isolées et la variété contient des bouteilles de Klein feuilletées. Dans ce cas le flot est revêtu par un flot transversalement orientable.

3 Feuilletages non dégénérés.

On s'interésse ici aux feuilletages totalement géodésiques dont aucune feuille n'est de type lumière. Deux cas se présentent les feuilletages dont toutes les feuilles sont de type espace ou dont toutes les feuilles sont de type temps. Ces cas admettent un angle d'attaque très efficace :

Proposition 3.1 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orientable de codimension* 1*. Il existe une métrique rendant $\mathcal{F}$ totalement géodésique de type espace (resp. temps) si et seulement si $\mathcal{F}$ est transverse à un flot riemannien (resp. lorentzien).*

C'est le point de départ de l'article [C-G] et de la dernière partie de [B-M-T]. Notamment on y trouve que les feuilletages géodésiques non dégénérés des variétés de Seifert de dimension 3 sont, à homotopie près, ceux transverses aux fibres. Savoir quelles sont les variétés de Seifert munies d'un tel feuilletage à sucité de nombreux travaux. Pour ne pas alourdir le propos nous rappelons seulement le cas où M est un fibré en cercle, il s'agit d'un théorème de Milnor et Wood (cf.[Wo]).

Théorème 1 (Milnor-Wood) *Soit M un fibré en cercle au dessus d'une surface Σ. La variété M admet un feuilletage de codimension* 1 *transverse aux fibres (c'est-à-dire totalement géodésique non dégénéré) si et seulement si*

$$|\mathrm{eul}(M)| \leq \max\{0, -\chi(\Sigma)\},$$

où $\mathrm{eul}(M)$ *désigne le nombre d'Euler de la fibration et $\chi(\Sigma)$ la caractéristique d'Euler de Σ.*

Ce résultat a par la suite été étendu aux fibrés de Seifert de dimension 3, à ce sujet le lecteur pourra consulter [E-H-N].

Nous allons voir dans la suite ce que devient le théorème de Milnor et Wood, ou du moins son interprétation en termes de feuilletages totalement géodésiques, lorsque l'on impose au feuilletage d'être soit partout de type lumière, soit avec des feuilles de chaque type.

4 Feuilletages de type lumière.

4.1 Sur les variétés de dimension 3.

Les feuilletages de codimension 1, totalement géodésiques et de type lumière ont déjà fait l'objet d'une étude par A. Zeghib [Ze1]. Un tel feuilletage $\mathcal{F}$ est caractérisé par le fait qu'il contient un sous-feuilletage de dimension 1 dont la restriction à chaque feuille de $\mathcal{F}$ est riemannienne. C'est ainsi que l'on peut voir que sur une variété de dimension 3 les feuilles d'un tel feuilletage ne peuvent être que des cylindres, des plans ou des tores. En particulier toute action localement libre de $\mathbb{R}^2$ ou de GA (le groupe affine) sur une variété de dimension 3 engendre un feuilletage totalement géodésique de type lumière.

Nous allons montrer ici que de nombreuses variétés de Seifert ne possèdent pas de tels feuilletages. On commence par un résultat plus général sur les feuilletages dont les feuilles sont des plans, des cylindres ou des tores. On connait déjà quelques exemples : le feuilletage de Reeb sur $D^2 \times S^1$, le feuilletage en cylindre sur $\mathcal{K}$ (il s'agit du I fibré non trivial sur la bouteille de Klein), ou les feuilletages sans composantes de Reeb de $T^2 \times I$ obtenus à partir des feuilletages sur un anneau. Ce résultat ne prétend pas être original, il s'agit de choses connues mises ensembles.

Théorème 2 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe C^2 de codimension 1 sur une variété fermée de dimension 3 dont les feuilles sont des cylindres, des plans ou des tores. Alors soit $\mathcal{F}$ est minimal, soit les feuilles toriques de $\mathcal{F}$ bordent des composantes difféomorphes à $D^2 \times S^1$, $T^2 \times I$ ou à $\mathcal{K}$ (le fibré non trivial en intervalle sur la bouteille de Klein).*

Preuve. Un théorème non publié de Duminy (mais voir [C-C2]) affirme que les minimaux exceptionnels d'un feuilletage de classe C^2 ont une infinité de bouts. On en déduit que $\mathcal{F}$ n'a pas de minimaux exceptionnels. Le feuilletage est donc soit minimal soit ses feuilles non compactes s'accumulent toutes sur ses feuilles toriques. Dans le second cas on peut appliquer le lemme suivant issu de [M-R], page 150 :

Lemme 4.1 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 de classe C^2 d'une variété M. Soit F une feuille compacte de $\mathcal{F}$. Si F a un voisinage ne rencontrant pas de feuilles compactes de $\mathcal{F}$ et si son holonomie est abélienne alors le germe de $\mathcal{F}$ au voisinage de F est sans holonomie en dehors de F.*

Ainsi le feuilletage $\mathcal{F}$ est presque sans holonomie, c'est-à-dire seules les feuilles compactes peuvent avoir une holonomie non triviale. On en déduit que les composantes de $\mathcal{F}$ sont feuilletées soit par des plans, soit par des cylindres. Ces feuilletages ont été classés dans [R-R] par R. Roussarie et H. Rosenberg dans le cas des feuilles planes et dans [He] par G. Hector dans le cas des feuilles cylindriques. □

Corollaire 4.2 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage lisse orientable de codimension 1 totalement géodésique de type lumière d'une variété compacte de dimension 3. Si $\mathcal{F}$ a une feuille compacte, en fait torique, alors M est un fibré en tore sur le cercle ou est difféomorphe à $\mathcal{K} \cup_f \mathcal{K}$ (variété obtenue en recollant 2 exemplaires de $\mathcal{K}$ le long de leurs bords par un difféomorphisme f), sinon $\mathcal{F}$ est minimal.*

Preuve. On sait d'après [Ze1] qu'un feuilletage de codimension 1 totalement géodésique de type lumière d'une variété de dimension 3 a des feuilles planes, cylindriques ou toriques. De plus il ne peut contenir de composantes de Reeb (voir [Ze1]) et on suppose ici qu'il n'est pas minimal. D'après le théorème 2, M est obtenue en recollant des composantes $T^2 \times I$ et $\mathcal{K}$, ce qui prouve le corollaire.□

Les fibrés en tores sur le cercle sont de rang 2, c'est-à-dire qu'ils admettent une action localement libre de $\mathbb{R}^2$, et donc ils contiennent effectivement des feuilletages totalement géodésiques de type lumière à feuilles compactes. On voudrait étudier maintenant les variétés de Seifert de dimension 3 qui ne sont pas des fibrés en tores

Commençons par un exemple. Soit M le fibré tangent unitaire d'une surface Σ de genre $g > 1$. Cette variété est difféomorphe au quotient de $PSL(2,\mathbb{R})$ par l'action à gauche d'un sous-groupe discret Γ isomorphe au groupe fondamental de Σ. On voit donc que $PSL(2,\mathbb{R})$ agit à droite sur M. Si on considère maintenant un sous-groupe de $PSL(2,\mathbb{R})$ isomorphe au groupe affine GA, il définit sur M un feuilletage $\mathcal{F}$ totalement géodésique de type lumière et de codimension 1.

Si on se donne maintenant un revêtement fini $\widehat{M}$ de M, on peut relever $\mathcal{F}$ à $\widehat{M}$ en un nouveau feuilletage totalement géodésique de type lumière. Construisons de cette façon quelques exemples à partir du précédent.

Le groupe fondamental d'un fibré en cercle M sur une surface de genre $g > 1$ peut être représenté par :

$$(*) \qquad \Pi = \left\langle s,\, \alpha_i,\, \beta_i,\ \text{pour } i = 1 \dots g \;\middle|\; \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = s^{\mathrm{eul}(M)},\ s \text{ central} \right\rangle,$$

où s est la classe d'homotopie d'une fibre et $\mathrm{eul}(M)$ est un entier appelé le nombre d'Euler de M (dans notre exemple $\mathrm{eul}(M) = 2 - 2g$). Soit d un diviseur de $\mathrm{eul}(M)$, on pose $r = \mathrm{eul}(M)/d$. Soit Π_d le sous-groupe normal de Π engendré par les α_i, les β_i et s^d. On a

$$\Pi_d = \left\langle s^d,\, \alpha_i,\, \beta_i,\ \text{pour } i = 1 \dots g \;\middle|\; \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = (s^d)^r,\ s^d \text{ central} \right\rangle.$$

On peut prendre maintenant les revêtements associés à ces sous-groupes. On obtient ainsi des fibrés en cercle au-dessus de Σ et de nombre d'Euler r, mais r peut être n'importe quel diviseur de $2g - 2$. Ces variétés sont des quotients du revêtement universel de $PSL(2,\mathbb{R})$. On veut voir maintenant que ce sont les seuls fibrés en cercle au-dessus de Σ à posséder des feuilletages totalement géodésiques de type lumière. Pour cela on montre.

Proposition 4.3 *Si un fibré en cercle M orientable sur une surface orientable Σ de genre g et de nombre d'Euler $\mathrm{eul}(M)$ possède un feuilletage $\mathcal{F}$ lisse transversalement orientable de codimension 1 totalement géodésique de type lumière alors $g \neq 0$ et si $g > 1$ alors $\mathrm{eul}(M)$ divise $\chi(\Sigma) = 2g - 2$.*

Preuve. Supposons que $g = 0$, c'est-à-dire que $\Sigma = S^2$, le revêtement universel de M est S^3 ou $S^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}$ contient une composante de Reeb. On sait grâce à [Ze1] que c'est impossible. Lorsque $g = 1$ la variété M admet une action localement libre de $\mathbb{R}^2$ et donc un feuilletage totalement géodésique de type lumière. On suppose donc dorénavant que $g > 1$.

La suite de la preuve découle de la simple remarque suivante. Un feuilletage de type lumière et de codimension 1 contient un sous-feuilletage de dimension 1 engendré par l'orthogonal du tangent. La distribution d'hyperplans a donc une classe d'Euler triviale.

D'après la proposition 4.2, $\mathcal{F}$ n'a pas de feuilles compactes. Un célèbre théorème de W.P. Thurston et G. Levitt [Le] nous dit qu'alors $\mathcal{F}$ est homotope à un feuilletage transverse aux fibres. Par ailleurs R. Geoghegan et A. Nicas ont pu determiner la classe d'Euler de la distribution normale à un fibré de Seifert "admissible"[1] (cf. [G-N] théorème 4.13). Ils donnent son dual de Poincaré qui est égal à :

$$(\chi(\Sigma) - r)\gamma_0 + \sum_{j=1}^{r} g_j \in H_1(M; \mathbb{Z}),$$

[1] c'est-à-dire orientable, de base orientable et différente de S^2, ou de base S^2 et avec au moins 3 fibres exceptionnelles

où $\chi(\Sigma)$ représente la caractéristique d'Euler de la base, r le nombre de fibres exceptionnelles, γ_0 la classe d'homologie d'une fibre régulière et les g_j les classes des fibres singulières.
Ici la formule se simplifie en

$$\chi(\Sigma)\gamma_0$$

(l'auteur ignore s'il existe une preuve simple dans ce cas particulier). Grâce à $(*)$, on voit que γ_0, qui est l'image de s dans $H_1(M;\mathbb{Z})$, est d'ordre $\mathrm{eul}(M)$. Ainsi la classe d'Euler est nulle si et seulement si $\chi(\Sigma)$ est un multiple de $\mathrm{eul}(M)$. $\square$

Remarque : Cet énoncé contient trois invariants portant le nom d'Euler. La caractéristique d'Euler d'une surface qu'il est inutile de présenter. Le nombre d'Euler d'un fibré en cercle (ou d'un fibré de Seifert) qui représente l'obstruction à l'existence d'une section. Et la classe d'Euler d'un fibré vectoriel (ici le fibré tangent au feuilletage) qui est une obstruction à l'existence d'une section partout non nulle de ce fibré vectoriel.

En mettant ensemble la proposition 4.3, la discussion qui la précède et le fait qu'un fibré en cercle de base donnée est déterminé par son nombre d'Euler, on obtient :

Théorème 3 *Un fibré en cercle orientable M sur une surface orientable Σ de genre $g > 1$ compacte et de nombre d'Euler $\mathrm{eul}(M)$ possède un feuilletage de codimension 1 lisse totalement géodésique et de type lumière si et seulement si $\mathrm{eul}(M)$ divise $2g-2$.*

Le théorème 3 se traduit sur les fibrés de Seifert par un résultat à revêtement fini près.

Corollaire 4.4 *Si M est une variété de Seifert de dimension 3 possédant un feuilletage de classe C^2 totalement géodésique de type lumière et de codimension 1 alors M a un revêtement fini $\widehat{M}$ qui est un fibré en cercles sur une surface de genre $g \geq 1$. De plus si $g > 1$ alors $\mathrm{eul}(\widehat{M})$ divise $2g-2$.*

Preuve. Les fibrés de Seifert qui ne sont pas revêtus par des fibrés en cercles n'ont pas pour revêtement universel $\mathbb{R}^3$ et donc ne possèdent pas de feuilletages totalement géodésiques de type lumière. Le relevé de $\mathcal{F}$ à $\widehat{M}$ est aussi un feuilletage totalement géodésique de type lumière et le théorème 3 permet de conclure.$\square$

L'une des motivations pour étudier les feuilletages totalement géodésiques de type lumière est qu'ils apparaissent lorsque l'action du groupe des difféomorphismes sur l'espace des métriques de M n'est pas propre (cf. [Mo1]). Cependant dans ce cas là, ils ne sont a priori que lipschitziens. La seule propriété connue par l'auteur entraînant la présence d'un feuilletage totalement géodésique *lisse* est l'existence d'une métrique analytique réelle ou à courbure constante sur une variété fermée dont le groupe d'isométrie est non compact (cf. [Ze2] et [Ze1]). On a donc le corollaire suivant.

Corollaire 4.5 *Soit M un fibré en cercle orientable sur une surface Σ de genre $g > 1$ et de nombre d'Euler $\mathrm{eul}(M)$. La variété M possède une métrique lorentzienne h analytique réelle ou à courbure constante telle que $Isom(h)$ est non-compact si et seulement si $\mathrm{eul}(M)$ divise $2g-2$.*

Remarque. Lorsque h est à courbure constante, on peut montrer que celle ci est forcément négative. En effet, d'une part il n'existe pas de variété lorentzienne compacte à courbure constante positive (cf. [Kl]) et d'autre part si h était plate, le groupe fondamental de M serait virtuellement polycyclique (cf. [G-K]). Réciproquement une variété compacte de dimension 3 à courbure constante négative est toujours un fibré de Seifert de base hyperbolique. La partie courbure constante du corollaire 4.5 se déduit alors de l'article de F. Salein [Sa] concernant les variétés de dimension 3 à courbure constante négative.

Preuve. La seule chose qu'il reste à prouver c'est l'existence d'une métrique à groupe d'isométrie non compact. Pour cela on reprend $M = PSL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ et on l'équipe de la métrique induite par la forme de Killing de $PSL(2,\mathbb{R})$, on obtient une métrique analytique réelle, à courbure constante et dont le groupe d'isométrie contient $PSL(2,\mathbb{R})$. Les mêmes opérations que précédemment permettent de conclure. □

Lorsque M est le fibré unitaire d'une surface hyperbolique, E. Ghys a montré dans [Gh] que tous les feuilletages lisses sans feuilles compactes de M sont C^∞ conjugués et donc tous engendrés par une action *lisse* du groupe affine. Hélas, lorsque $|\mathrm{eul}(M)| \neq 2g-2$ nous ne disposons plus d'un tel résultat. Cependant le théorème 9 de [Ze1] nous permet de donner une version faible.

Corollaire 4.6 *Soit M une variété compacte de dimension 3 qui n'est pas revêtue par un fibré en tore sur le cercle. S'il existe sur M un feuilletage $\mathcal{F}$ lisse de codimension 1 totalement géodésique et de type lumière alors $\mathcal{F}$ peut être paramétré par une action C^0 du groupe affine.*

Preuve. D'après le corollaire 4.2 on sait que $\mathcal{F}$ est minimal. Ce feuilletage étant lisse, il possède une mesure transverse si et seulement il est sans holonomie. Si $\mathcal{F}$ était sans holonomie M serait revêtu par $\mathbb{T}^3$ ce qui est exclu ici. Ainsi $\mathcal{F}$ n'a pas de mesure transverse. Le théorème 9 de [Ze1] affirme justement qu'un feuilletage totalement géodésique de type lumière sans mesure transverse est paramétré par une action C^0 du groupe affine.□

Il semble raisonnable de penser qu'il n'existe pas de nouveaux exemples, du moins lisses, sur ces variétés.

4.2 Un autre exemple.

Nous donnons maintenant un résultat d'existence de feuilletages totalement géodésiques de type lumière plus élémentaire.

Proposition 4.7 *Il existe des feuilletages totalement géodésiques lisses de type lumière et de codimension 1 sur le produit de deux sphères $S^{2n+1} \times S^{2m+1}$.*

Il s'agit, à notre connaissance, du premier exemple connu de feuilletage de codimension 1 totalement géodésique de type lumière sur une variété compacte simplement connexe.

Preuve. On munit la sphère S^{2m+1} d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 et l'autre sphère d'un flot riemannien ϕ. Le feuilletage $\mathcal{F} \times S^{2n+1}$ est partout tangent au flot riemanien ϕ. Ce qui d'après [Ze1] permet de conclure. □

Remarques : 1) on pourrait montrer que l'existence d'un feuilletage de codimension 1 tangent à un flot riemannien sur une variété simplement connexe entraîne l'existence d'une action localement libre de $\mathbb{R}^2$. Il semble donc impossible de reproduire cette construction sur les sphères (cf. [A-S] sur l'existence de telles actions sur les sphères).

2) Cette proposition est à relier à la question de D'Ambra et Gromov :
«Si M est compacte simplement connexe l'action de Diff(M) sur l'espace des métriques de Lorentz est-elle propre (pour la topologie C^2) ?»
Comme on l'a déjà rappelé la non-propreté de cette action entraîne l'existence d'un feuilletage lipschitzien de codimension 1 totalement géodésique et de type lumière (cf. [Mo1] théorème 2.2). Ainsi sur $S^3 \times S^3$, les feuilletages totalement géodésiques ne permettent pas de

montrer immédiatement cette conjecture (contrairement à S^3), mais ils ne la contredisent pas.

5 Feuilletages mixtes

Dans ce paragraphe nous considérons les feuilletages lisses totalement géodésiques mixtes c'est-à-dire possédant des feuilles d'au moins deux types. Ceux ci ont été étudiés précédemment par K. Yokumoto [Yo]. Il prouve en particulier le résultat suivant.

Théorème 4 (Yokumoto) *Il existe des feuilletages totalement géodésiques et de codimension* 1 *sur les espaces lenticulaires. De plus si $\mathcal{R}$ est une composante de Reeb d'un feuilletage totalement géodésique alors ses feuilles planes sont de type espace et sa feuille torique est de type lumière.*

Nous allons donner de nouveaux exemples de tels feuilletages, principalement sur les fibrés de Seifert. Nous allons suivre une démarche sensiblement différente.

Si on regarde le 1-feuilletage orthogonal d'un feuilletage $\mathcal{F}$ totalement géodésique mixte, on trouve un flot riemannien sur l'ouvert des feuilles de type espace de $\mathcal{F}$, lorentzien sur l'ouvert des feuilles de type temps de $\mathcal{F}$ et riemannien dégénéré sur le fermé des feuilles de type lumière (cf. sections 3 et 4). Nous allons nous concentrer sur les situations ou les feuilles de type lumière sont isolées. Nous nous restreignons au cas où ce flot orthogonal est *partout* riemannien ou lorentzien, ce qui dans ce cas est raisonnable. Cela va nous permettre de mieux comprendre ces feuilletages, essentiellement la situation au voisinage des feuilles de type lumière et surtout d'avoir un analogue de la proposition 3.1.

Plus précisement, nous nous posons la question : quelle position relative entre un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 et un flot riemannien (ou lorentzien) ϕ permet de conclure qu'il existe une métrique lorentzienne rendant $\mathcal{F}$ totalement géodésique et telle que $T\mathcal{F}^{\perp} = T\phi$, en excluant bien-sûr le cas non dégénéré où ϕ et $\mathcal{F}$ sont transverses. On trouve dans l'article de K. Yokumoto [Yo] des exemples de feuilletages totalement géodésiques invariants par une action de S^1. On cherche à relacher cette condition au maximum.

L'hypothèse minimale (et qui semble raisonnable) est de supposer que pour chaque feuille F de $\mathcal{F}$ soit ϕ est tangent à F partout soit ϕ est transverse à F partout. Mais nous allons voir que ce ne sera pas suffisant. Posons donc une première définition.

Définition 5.1 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension* 1 *et ϕ un feuilletage de dimension* 1*. On dira que $\mathcal{F}$ et ϕ sont transverses ou tangents feuille à feuille si pour toute feuille F de $\mathcal{F}$, F et ϕ sont soit partout transverses, soit partout tangents.*

On dira qu'une feuille F de $\mathcal{F}$ est une feuille de tangence si en tout point x de F on a $T_x\phi \subset T_x\mathcal{F}$.

Commençons par une remarque sur les flots lorentziens. Supposons que ϕ soit un flot lorentzien tangent à une hypersurface S de type espace pour une métrique quasi-fibrée. Le flot ϕ préserve la direction orthogonale à cette hypersurface qui est de type temps et donc en tout point de S sa différentielle est bornée. Il découle du théoréme B de [B-M-T] que la différentielle de ϕ est partout bornée et que ϕ est riemannien. Cette situation est exactement celle rencontrée le long d'une feuille de tangence (voir proposition 5.8). C'est pourquoi nous n'étudierons que les feuilletages transverses ou tangents à des flots riemanniens. Il est sans doute bon de rappeler qu'un flot à la fois lorentzien et riemannien est un flot riemannien possédant un champ de vecteurs basique obtenu en diagonalisant simultanément les métriques transverses.

5.1 Un premier obstacle.

Regardons une première propriété globale des feuilletages totalement géodésiques. Pour cela nous donnons une nouvelle définition. Un feuilletage de codimension 1 dont l'orthogonal est orienté est transversalement orienté (même si certaines feuilles sont de type lumière), on supposera donc toujours $\mathcal{F}$ transversalement orientable dans la suite.

Définition 5.2 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 transversalement orientable et transverse ou tangent feuille à feuille à un flot ϕ. Soit F_0 une feuille de tangence de $\mathcal{F}$ et X une trivialisation de $T\phi$. À tout champ de vecteurs Z transverse à $\mathcal{F}$ on peut associer un champ de vecteurs Y non nul et appartenant à $T\mathcal{F} \cap \mathrm{Vect}(X, Z)$. Il existe alors 2 fonctions a et b telles que $Y = aX + bZ$. On dira que F_0 est* attractive vue de *ϕ si b change de signe au voisinage de F_0.*

Les champs de vecteurs non nuls transverses à $\mathcal{F}$ sont tous homotopes et donc cette propriété ne dépend pas du choix de Z. La proposition qui suit montre comment cette propriété conditionne le type des feuilles des feuilletages totalement géodésiques.

Proposition 5.3 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage totalement géodésique sur une variété lorentzienne (M, g). Supposons que F_0 soit une feuille de type lumière isolée (ses voisines sont non dégénérées). Alors les feuilles voisines de F_0 sont toutes de même type si et seulement si F_0 n'est pas attractive vue de $\mathcal{F}^\perp$.*

Preuve. Soit X une trivialisation de $\mathcal{F}^\perp$ et soit Z un champ de vecteurs de type temps transverse à $\mathcal{F}$ et tel que $g(Z, Z) = -1$. Comme ci-dessus on considére le champ Y tel que $Y \subset T\mathcal{F}$ et que $Y = X + bZ$, b étant une fonction lisse. On a $g(Y, Y) = b - b^2$ dont le signe ne dépend que de l'attractivité vue de $\mathcal{F}^\perp$.$\square$

Cette proposition nous permet déjà de donner un contre-exemple à notre hypothèse "minimale". En effet considérons un feuilletage de Reeb de S^3 (c'est-à-dire un feuilletage constitué de deux composantes de Reeb) invariant sous l'action du champ de Hopf, qui définit un flot riemannien ϕ, et transverse ou tangent feuille à feuille avec celui-ci. À l'intérieur de chacun des tores solides on a la possibilité de retourner la composante de Reeb car l'holonomie de la feuille torique est C^∞ infinitésimalement triviale (c'est-à-dire le développement de Taylor de son holonomie est trivial à tout ordre). On peut donc supposer que la feuille torique est attractive vue de ϕ. Le théorème 4 avec la proposition 5.3 nous permet d'affirmer qu'il n'existe pas de métriques lorentziennes rendant ce feuilletage de Reeb totalement géodésique.

De même si $\mathcal{F}$ possède une unique feuille de tangence avec ϕ, si elle ne sépare pas la variété et si elle est attractive vue de ϕ alors $\mathcal{F}$ ne peut pas être rendue totalement géodésique. On voit qu'il est nécessaire de rajouter des hypothèses simplement d'ordre combinatoire (on doit avoir un nombre pair de changement de signe pour pouvoir recoller) et d'autres plus subtiles sur les propriétés de ϕ qui doit être lorentzien sur certaines composantes de $\mathcal{F}$. Par exemple, pour n'avoir que des feuilles de type espace ou de type lumière il est nécessaire d'imposer à $\mathcal{F}$ de n'avoir pas de feuilles de tangences avec ϕ qui soit attractives vues de ϕ.

Après ces obstructions de type global, nous allons voir que localement, c'est-à-dire au voisinage d'une feuille de tangence, on ne peut pas non plus toujours rendre le feuilletage géodésique.

5.2 Au voisinage d'une feuille de tangence.

Étant donné un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 et un flot riemannien ϕ on cherche à construire une métrique g rendant $\mathcal{F}$ totalement géodésique. Notre connaissance des cas non-dégénérés et de type lumière nous permet de donner immédiatement le critère suivant. Critère que nous utiliserons par la suite. On retrouve ce résultat, formulé différemment dans [Yo] proposition 2.13.

Proposition 5.4 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 transversalement orientable et soit ϕ un flot. On appelle U_T l'ouvert de M sur lequel ces feuilletages sont transverses. Il existe une métrique pseudo-riemannienne g telle que $\mathcal{F}$ et ϕ sont orthogonaux et qui rend $\mathcal{F}$ totalement géodésique si et seulement si $\mathcal{F}$ et ϕ sont transverses ou tangents feuille à feuille, la métrique g est quasi-fibrée par rapport à ϕ sur U_T et la restriction de g aux feuilles de tangence est elle aussi quasi-fibrée par rapport à ϕ.*

La difficulté dans la suite sera de réussir à construire une telle métrique. Nous allons voir que même localement on rencontre des difficultés. Il va nous falloir décrire la position relative de $\mathcal{F}$ et ϕ, pour cela nous avons tout d'abord besoin du lemme suivant.

Lemme 5.5 *Soit F_0 une hypersurface plongée tangente à un flot riemannien ϕ. Il existe au voisinage de F_0 un champ de vecteurs Z transverse à F_0 et préservé par ϕ (basique).*

Preuve. Il suffit de considérer pour une métrique quasi-fibrée, l'orthogonal de F_0 et les géodésiques issues de cet orthogonal.□

On peut maintenant formuler la définition suivante.

Définition 5.6 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 transversalement orientable et transverse ou tangent feuille à feuille à un flot riemannien ϕ. Soit F_0 une feuille de tangence propre (plongée) et isolée, Z le champ de vecteurs fourni par le lemme 5.5, X une trivialisation de $T\phi$. Soit Y un champ de vecteurs tangent à $T\mathcal{F} \cap \mathrm{Vect}(X, Z)$, il existe deux fonctions a et b telles que $Y = aX + bZ$ (on peut même supposer que $a^2 + b^2 = 1$).*

On dira que $\mathcal{F}$ est adapté *à ϕ* en *F_0 s'il existe, au voisinage de F_0, une fonction β telle que $X.\beta = 0$ et que b/β soit lisse et ne s'annulle pas.*

On dira que $\mathcal{F}$ est adapté à ϕ s'il l'est pour toute feuille de tangence.

Cette condition ne dépend que des germes du feuilletage $\mathcal{F}$ en les feuilles de tangence. Cette fonction b décrit la façon dont le feuilletage $\mathcal{F}$ se comporte au voisinage de la feuille F_0 dans une direction du moins. Il serait intéressant de donner une interprétation plus géométrique, en relation avec l'holonomie du feuilletage par exemple. Ceci est faisable lorsque les feuilles de $\phi_{|F_0}$ sont toutes fermées mais semble difficile dans le cas général.

Clairement lorsque b est constante le long de ϕ cette hypothèse est vérifiée. C'est le cas par exemple si on peut paramétrer ϕ en ϕ_t de façon isométrique et si $\mathcal{F}$ est invariant par ϕ_t. À partir d'une telle situation, on peut perturber $\mathcal{F}$ loin des feuilles de tangence sans modifier le fait que $\mathcal{F}$ est adapté à ϕ. Nous verrons donc la propriété «être adapté à ϕ» comme les déformations maximales autorisées depuis une situation invariante ou comme une propriété faible d'invariance de $\mathcal{F}$. Notons que cette propriété n'est pas triviale, on construit facilement des feuilletages transverses ou tangents feuille à feuille à un flot riemannien mais non adaptés à celui-ci.

Cette définition est toutefois le bon critère comme le montre la proposition suivante :

Proposition 5.7 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 transversalement orientable et transverse ou tangent feuille à feuille à un flot riemannien ϕ. Soit F_0 une feuille de tangence compacte et isolée. Il existe au voisinage de F_0 une métrique lorentzienne g telle que le tangent à ϕ soit l'orthogonal du tangent à $\mathcal{F}$ et rendant $\mathcal{F}$ totalement géodésique si et seulement $\mathcal{F}$ est adapté à ϕ en F_0.*

Preuve. On va construire, au voisinage de F_0, une métrique lorentzienne quasi-fibrée sur $\{x \in M \,|\, T_x\phi + T_x\mathcal{F} = T_xM\}$ et dont la restriction à F_0 sera encore quasi-fibrée. Cette métrique rendra effectivement le feuilletage $\mathcal{F}$ totalement géodésique. Par hypothèse F_0 est compacte et il existe un voisinage de F_0 sur lequel F_0 est la seule feuille de tangence entre $\mathcal{F}$ et ϕ. D'après le lemme 5.5, il existe un champ de vecteurs Z invariant par ϕ et transverse à F_0. Soit γ une métrique riemannienne quasi-fibrée par rapport à ϕ. Soit X une trivialisation du tangent à ϕ. Considérons le champ de vecteurs Y introduit dans la définition 5.6, on a $Y = aX + bZ$ et $a^2 + b^2 = 1$. Au voisinage de F_0, on va définir une métrique lorentzienne g. On note P la distribution orthogonale, pour γ, à $\mathrm{Vect}(X, Z)$. Considérons la décomposition du tangent à la variété suivante : $TM = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Z \oplus P$. Prenons la métrique qui se représente dans une base adaptée à cette décomposition par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -\frac{b^2}{\beta} & \frac{a\,b}{\beta} & 0 \\ \frac{a\,b}{\beta} & \frac{b^2}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{|P} \end{pmatrix},$$

où β est la fonction introduite lors de la définition 5.6. Cette métrique est bien lorentzienne et lisse de plus sa restriction à TF_0 a bien les propriétés voulues. En un point x tel que $b(x) \neq 0$, c'est-à-dire en un point n'appartenant pas à F_0, on peut décomposer le tangent à la variété en $\mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y \oplus P$ (de plus $T\mathcal{F} = \mathbb{R}Y \oplus P$), la métrique s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} -\frac{b^2}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{|P} \end{pmatrix}.$$

Clairement $T\phi^{\perp} = T\mathcal{F}$. Le flot riemannien ϕ respecte la décomposition orthogonale $\mathbb{R}Y \oplus P$ et donc g est quasi-fibrée si et seulement si le champ de vecteurs $Y/\sqrt{|g(Y,Y)|}$ est préservé par ϕ, c'est-à-dire est basique. Ce qui est vrai si et seulement si β est constante le long de ϕ, ce que l'on a supposé vrai. On a donc une métrique g définie au voisinage de F_0 telle que $\mathcal{F}$ est totalement géodésique et $T\phi^{\perp} = T\mathcal{F}$.

Réciproquement supposons qu'il existe une métrique lorentzienne g telle que $T\mathcal{F}$ soit orthogonal à $T\phi$ et que $\mathcal{F}$ soit totalement géodésique. On considère au voisinage de la feuille de tangence F_0 les champs de vecteurs X, Y et Z comme précédemment. Si on est suffisament proche de F_0, Z n'est pas tangent à $\mathcal{F}$ et donc le champ de plans $\mathrm{Vect}(X, Z)$ n'est pas dégénéré. Soit P la distribution de plans de codimension 2 orthogonale, pour g, à $\mathrm{Vect}(X, Z)$, P est bien supplémentaire de $\mathrm{Vect}(X, Z)$. Comme plus haut on écrit $Y = aX + bZ$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et on peut représenter g, dans une base adaptée à la décomposition du tangent en $\mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Z \oplus P$, par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -b\,\alpha & a\,\alpha & 0 \\ a\,\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & g_{|P} \end{pmatrix},$$

où α et c sont deux fonctions. On a $g(Y, Y) = a^2\alpha b + c\,b^2\alpha$. La fonction c étant bornée et la fonction α partout non nulle on voit que Y ne peut pas être de type lumière (sauf sur

F_0). Le feuilletage $\mathcal{F}$ étant totalement géodésique et Z étant préservé par ϕ, on en déduit que le champ de vecteurs $Y/\sqrt{|g(Y,Y)|}$, défini si $b \neq 0$, c'est-à-dire hors de F_0, est lui aussi invariant par ϕ et donc $X.\big(g(Y,Y)/b^2\big) = 0$. On a donc

$$X.\big(\alpha(1/b - b + c)\big) = 0.$$

Sachant que α ne s'annule pas et que c est bornée on en déduit que la fonction $\beta = \left(\alpha(1/b - b + c)\right)^{-1}$ vérifie $X.\beta = 0$ et b/β est lisse et ne s'annule pas sur F_0. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est bien adapté à ϕ en F_0. $\square$

L'exemple construit au paragraphe 5.1 est bien adapté à son orthogonal mais cela ne suffit pas.

5.3 Où l'on résoud le problème global.

Il nous reste à résoudre les difficultés rencontrées au paragraphe 5.1. C'est ce que nous permet de faire la proposition suivante.

Proposition 5.8 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage totalement géodésique de codimension 1, sur une variété lorentzienne (M,g), dont l'orthogonal est un flot riemannien ϕ et dont les feuilles de type lumière sont compactes et en nombre fini non nul. Soit K une composante de $\mathcal{F}$ de type temps maximale c'est-à-dire telle que tout voisinage du bord de K rencontre des feuilles de type espace. Il existe alors un voisinage U de K tel que ϕ restreint à U soit (transversalement) lorentzien. De plus il existe sur U une métrique quasi-fibrée h transversalement lorentzienne telle que les feuilles de $\mathcal{F}$ qui sont de type lumière pour g sont de type espace pour h.*

Preuve. Nous allons prouver qu'il existe un voisinage U de K sur lequel ϕ préserve une direction, cela montrera bien que ϕ y est lorentzien. Il est clair que ϕ restreint à l'intérieur de K est lorentzien (même si l'intérieur de K contient des feuilles de type lumière) : la direction obtenue en diagonalisant simultanément g restreinte au tangent à $\mathcal{F}$ et une métrique riemannienne transverse donne la direction invariante désirée. D'autre part le bord de K est composé de feuilles de type lumière, le lemme 5.5 donne une autre direction invariante sur ce voisinage.

Reprenons les notations de la deuxième partie de la preuve de la proposition 5.7. La métrique $g_{|P}$ est forcément riemannienne (sinon la métrique n'est plus lorentzienne lorsque $b = 0$). Ainsi quitte à modifier la métrique riemannienne transverse on peut supposer que la direction transverse donnée par Z est bien la même que celle obtenue plus haut. On a bien une métrique lorenzienne transverse dont la restriction à P est riemannienne. $\square$

Cette proposition nous invite à définir la notion suivante :

Définition 5.9 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 et ϕ un flot riemannien transverses ou tangents feuille à feuille et n'ayant qu'un nombre fini de feuilles de tangence. On dira que $\mathcal{F}$ et ϕ sont* globalement compatibles *s'il existe un ouvert U de M dont la frontière ne rencontre pas les feuilles de tangence et une métrique quasi-fibrée transversalement lorentzienne h sur U telle que les feuilles de tangence de $\mathcal{F}$ contenues dans U sont de type espace pour h, que tout chemin traversant une composante connexe de U rencontre 2 feuilles attractives vues de ϕ et que toutes les feuilles de tangence attractives vues de ϕ sont dans U.*

On voit bien que malgré son apparente opacité cette définition est incontournable et n'est probablement pas simplifiable. Mise avec les résultats du paragraphe 5.2, elle nous permet de formuler ce théorème :

Théorème 5 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 transversalement orientable et transverse ou tangent feuille à feuille à un flot riemannien ϕ sur une variété M. On suppose de plus que les feuilles de tangence de $\mathcal{F}$ sont compactes et en nombre fini. Il existe une métrique lorentzienne g rendant $\mathcal{F}$ totalement géodésique et telle que $T\mathcal{F}$ soit orthogonal à $T\phi$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est adapté à ϕ et si $\mathcal{F}$ et ϕ sont globalement compatibles.*

Preuve. Tout d'abord il est clair que sous les hypothèses du théorème, si $\mathcal{F}$ est totalement géodésique avec $T\mathcal{F}$ orthogonal à $T\phi$ alors $\mathcal{F}$ est adapté à ϕ et $\mathcal{F}$ et ϕ sont globalement compatibles : il s'agit des propositions 5.7 et 5.8. Étudions la réciproque.

On suppose que $\mathcal{F}$ est adapté à ϕ et que $\mathcal{F}$ et ϕ sont globalement compatibles. On reprendra certaines notations de la preuve de la proposition 5.7. D'après la proposition 5.7, il existe une métrique g ayant les propriétés voulues mais seulement définie au voisinage de chacune des feuilles de tangence seulement. Il reste à recoller les morceaux sans perdre ces propriétés. Considérons U une composante connexe de M privée des feuilles de tangences de $\mathcal{F}$. Le fait que $\mathcal{F}$ et ϕ soient globalement compatibles nous permet de choisir g de telle sorte qu'au voisinage du bord de U, la restriction de g à $T\mathcal{F}$ est soit riemannienne, soit lorentzienne. Les hypothèses faites sur le nombre de feuilles attractives vues de ϕ, reviennent à supposer que si la restriction de g à $\mathcal{F}$ est lorentzienne alors ϕ est transversalement lorentzienne sur un voisinage V de U, ce qui est nécessaire au raccord de g d'après la proposition 5.8. Le champ de vecteurs Z qui a servi à la construction de g au voisinage des feuilles de tangence peut alors être étendu à tout V (mais pas la fonction β a priori).

Sur l'ouvert U le flot ϕ et le feuilletage $\mathcal{F}$ sont transverses, on peut donc considérer une métrique g' quasi-fibrée telle que $T\phi$ soit orthogonal à $T\mathcal{F}$. On ne cherche pas à étendre g' au bord de U. Si la restriction de g à $\mathcal{F}$ est lorentzienne sur U, on choisit g' de telle sorte qu'elle coïncide avec la métrique h donnée par la proposition 5.8 sur le fibré normal de ϕ noté $\nu(\phi)$ (on a $\nu(\phi) = TM/T\phi$). Si g restreint à $\mathcal{F}$ est riemannienne, on prend une métrique g' dont la restriction à $\nu(\phi)$ est riemannienne. Dans les deux cas, si ζ est une fonction plateau s'annulant hors du domaine de définition de g et valant 1 sur un voisinage du bord de U alors la métrique $g_\zeta = \zeta g + (1-\zeta)g'$ est une métrique lorentzienne lisse pour laquelle $T\phi$ est bien orthogonal à $T\mathcal{F}$. De plus il est clair que g_ζ est quasi-fibrée si et seulement si ζ est constante le long de ϕ.

Les deux situations se ramènent donc au même problème : trouver une fonction plateau vérifiant les conditions ci-dessus. Pour cela on revient dans la variété de départ M munie d'une métrique *riemannienne* quasi-fibrée γ. Au voisinage d'une feuille de tangence F_0 on considère la fonction δ qui a un point x de M associe la distance de x à F_0. Comme F_0 est feuilletée par ϕ et que γ est quasi-fibrée cette fonction est constante le long de ϕ. On construit alors aisément la fonction ζ à partir de δ. $\square$

On peut donner le corollaire suivant, qui est plutôt une relecture de la preuve précédente sous des hypothèses plus fortes.

Corollaire 5.10 *Reprenons les hypothèses du théorème 5, supposons de plus que ϕ peut être paramétré en un champ de Killing riemannien ϕ_t et que $\mathcal{F}$ est invariant par ϕ_t. Alors il existe une métrique lorentzienne g* invariante *par ϕ_t rendant $\mathcal{F}$ totalement géodésique si et seulement si $\mathcal{F}$ et ϕ sont globalement compatibles.*

Preuve. Sous ces conditions, on peut prendre $\beta = b$ et donc $\mathcal{F}$ et adapté à ϕ. Le théorème 5 s'applique. En repétant la preuve on voit bien que ses différents ingrédients sont tous invariants par ϕ_t : les fonctions a et b, la distribution P et $\gamma_{|_P}$. Le flot paramétré ϕ_t préserve donc la métrique ainsi construite. $\square$

5.4 Où l'on rencontre enfin des feuilletages totalement géodésiques.

Nous allons donner un exemple illustrant la propriété 5.9 de compatibilité globale. Considérons le feuilletage de Reeb sur S^3 vu plus haut au paragraphe 5.1 , celui qui n'est pas géodésible. Prenons comme flot riemannien ϕ, paramétré en ϕ_t, le champ de Hopf. Au centre de l'une de ses composantes de Reeb on peut effectuer un tourbillonnement de Reeb (cf. [C-C1] p. 89). On obtient un nouveau feuilletage $\mathcal{F}$ invariant par ϕ_t, composé de 2 composantes de Reeb et d'un feuilletage par plans de $T^2 \times I$. Les 2 feuilles toriques sont attractives vues de ϕ et, restreint à un voisinage de $T^2 \times I$, le flot ϕ est bien lorentzien (c'est-à-dire transversalement parallélisable en dimension 3).

Ce feuilletage satisfait donc aux hypothèses du corollaire 5.10, il existe donc une métrique g rendant $\mathcal{F}$ totalement géodésique. Les feuilles des composantes de Reeb sont alors de type espace, celles de la composante $T^2 \times I$ de type temps et les 2 feuilles compactes de type lumière.

Voyons comment ce même genre de construction permet de donner de nombreux exemples. Nous donnons un premier résultat qui illustre comment créer de nouveaux exemples à partir d'anciens.

Proposition 5.11 *Soit M une variété de Seifert de dimension quelconque. Si M possède un feuilletage transverse aux fibres (donc totalement géodésique non dégénéré) alors il possède aussi une infinité de feuilletages totalement géodésiques mixtes de codimension* 1 *deux à deux non difféomorphes.*

Preuve. Les feuilletages sont simplement obtenus en effectuant des tourbillonements de Reeb au voisinage d'autant de fibres régulières (de feuilles sans holonomie) que l'on souhaite. Quitte à retourner ces composantes de Reeb, on voit que les feuilletages obtenus vérifient bien les hypothèses du théorème 5. □

Nous allons maintenant donner des exemples sur des variétés ne possédant pas de feuilletages géodésiques non dégénérés.

Théorème 6 *Quitte à prendre un revêtement à* 2 *feuillets, tout fibré de Seifert de dimension* 3 *admet un feuilletage totalement géodésique.*

Preuve. Soit $M \to B$ un fibré de Seifert. On a vu au paragraphe 2.3 que cette fibration provient d'un feuilletage riemannien de dimension 1. Si nécessaire nous prenons un revêtement à deux feuillets et nous supposons que l'on est bien en présence d'un *flot* riemannien c'est-à-dire que ce feuilletage est bien orienté. On commence alors la construction d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Il existe une collection finie de boules de B fermées disjointes, notées D_i, telle que le fibré restreint à $B \setminus \cup_i D_i$ soit localement trivial et admette une section, c'est-à-dire soit trivial. Le fibré obtenu admet donc un feuilletage transverse au bord et invariant sous l'action de S^1. Les feuilletages induits sur les composantes connexes du bord de $(B \setminus \cup_i D_i) \times S^1$ sont triviaux, on peut donc modifier le feuilletage de telle sorte qu'il devienne tangent au bord (opération appelée "spinning" dans [C-C1], p.84) et reste invariant sous l'action de S^1. Sur chaque $D_i \times S^1$, on met un feuilletage de Reeb invariant par translation le long de S^1 et par rotation sur D_i et dont l'holonomie de la feuille compacte est infinitésimalement C^∞ triviale. Pour obtenir un feuilletage de M, il suffit de recoller ces composantes de Reeb le long des composantes du bord. Ceci est possible grâce à l'hypothèse sur l'holonomie des feuilles compactes, cette hypothèse permet aussi de retourner, si nécessaire, les composantes de Reeb et de s'assurer ainsi que les feuilles compactes ne sont pas attractives vues des fibres de M (on pourrait aussi faire un tourbillonement de Reeb au centre de la composante de

Reeb comme précédemment). Le feuilletage satisfait toujours à l'hypothèse d'invariance et donc aux hypothèses du théorème 5. Il existe donc un feuilletage totalement géodésique sur M.□

Cette preuve s'applique sans modifications aux fibrés de Seifert de dimension supérieure ayant des fibres exceptionnelles isolées donc en particulier s'il n'y a pas de fibres exceptionnelles :

Théorème 7 *Si M est un fibré en cercle orientable alors M possède un feuilletage totalement géodésique mixte de codimension* 1.

Ce théorème s'applique par exemple aux sphères de dimension impaire. Elles possèdent donc toutes des feuilletages totalement géodésiques.

La variété $T^3_A = T^2 \times [0,1]/((x,0) \sim (Ax,1))$ où A est un automorphisme hyperbolique du tore possède un flot riemannien bien qu'elle ne soit pas un fibré de Seifert. On sait d'aprés [C-G] et [B-M-T] que T^3_A possède des feuilletages de codimension 1 totalement géodésiques non dégénérés (de type espace et de type temps) et par [Ze1] qu'il en possède de type lumière (T^3_A est de rang 2). Montrons qu'il en possède aussi des mixtes.

Considérons un feuilletage $\mathcal{F}$ de T^3_A sans composantes de Reeb et avec un nombre fini de feuilles compactes, on suppose de plus que ces feuilles compactes sont des fibres de la fibration en tores sur le cercle et que les feuilles non compactes sont transverses à ces fibres. Considérons ϕ un flot riemannien sur T^3_A tangent aux fibres (par exemple le feuilletage fortement stable du flot d'Anosov naturel de T^3_A), $\mathcal{F}$ et ϕ sont tangents ou transverses feuille à feuille. Au voisinage d'une feuille compacte, on considère une trivialisation de la fibration. On est donc sur $T^2 \times]0,1[$ et ϕ est un feuilletage sur les tores de pente constante irrationnelle. On peut modifier $\mathcal{F}$ de telle sorte que dans cette trivialisation il soit de plus invariant par la translation correspondante. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est alors adapté à ϕ, de plus ϕ est transversalement parallélisable et donc riemannien et lorentzien. Si de plus $\mathcal{F}$ a un nombre pair de feuilles attractives vues de ϕ alors le couple ($\mathcal{F}$, ϕ) satisfait bien aux hypothèses du théorème 5.

On peut facilement généraliser cette construction aux variétés de dimension supérieure possédant un flot riemannien dont l'adhérence de chaque feuille est un tore de codimension 1. On montre :

Proposition 5.12 *Soit M une variété compacte de dimension $n \geq 3$ possédant un flot riemannien transversalement orientable ϕ. Si ϕ possède une feuille dont l'adhérence est de codimension* 1 *alors M possède un feuilletage totalement géodésique mixte de codimension* 1.

Preuve. Deux cas se présentent. Soit l'adhérence de chaque feuille est un tore de codimension 1 et M est un fibré en tores sur le cercle et on reproduit la construction ci-dessus. Soit il existe une feuille dont l'adhérence est de codimension plus grande. Cette situation est décrite dans [Mol]. Dans ce cas les adhérences des feuilles sont des tores T^{n-1} sauf deux d'entre elles qui sont des tores T^{n-2}. Le long de chacun de ces tores le flot ϕ est conjugué à un flot linéaire dense. La variété M est obtenue en recollant deux exemplaires de $D^2 \times T^{n-2}$ le long de leur bord. On décompose T^{n-2} en $S^1 \times T^{n-3}$ et on prend $\mathcal{F}_0 = \mathcal{R} \times T^{n-3}$, où $\mathcal{R}$ est un feuilletage de Reeb de $D^2 \times S^1$ transverse au facteur S^1, invariant sous son action et tel que l'holonomie de la feuille compacte soit C^∞ infinitésimalement triviale. Le flot ϕ est tangent à $\mathcal{F}$ sur le bord de $D^2 \times T^{n-2}$ et transverse sur l'intérieur. On recolle deux exemplaires de ce feuilletage, on obtient un feuilletage $\mathcal{F}$ adapté à ϕ. Si on recolle bien, le feuilletage est aussi globalement compatible et donc $\mathcal{F}$ peut être rendu totalement géodésique. □

Pour conclure ce paragraphe notons deux questions qui viennent naturellement :
- existe-t-il des variétés possédant un flot riemannien mais ne possédant pas de feuilletage totalement géodésique de codimension 1 ?
- existe-t-il des variétés ne possédant pas de flot riemannien mais possédant des feuilletages totalement géodésiques de codimension 1 (dont les feuilles de type lumière sont isolées) ?

5.5 Un résultat sans l'hypothèse «flot riemannien».

On a donc montré que *toute variété fermée de dimension* 3 *possédant un flot transversalement orientable riemannien possède aussi un feuilletage totalement géodésique.* La proposition suivante est une sorte de réciproque sous certaines hypothèses, essentiellement l'absence de feuilles de type temps.

Proposition 5.13 *Soit M une variété fermée de dimension* 3 *munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ transversalement orientable de codimension* 1 *et totalement géodésique dont les feuilles de type lumière sont compactes et en nombre fini non nul et n'ayant pas de feuilles de type temps. Alors M est un fibré de Seifert ou un fibré en tore sur le cercle.*

Idée de preuve. Soit U une composante connexe de M privé des feuilles de type lumière, U posséde un flot riemannien ϕ_U. Les composantes connexes du bord de U sont forcément des tores. Il y a alors deux possibilités. Soit toutes les feuilles de ϕ vont s'accumuler sur le bord et alors $U \simeq T^2 \times]0,1[$, soit l'adhérence de toutes les trajectoires de ϕ sont des cercles ou des tores et alors $U \simeq D^2 \times S^1$ ou $T^2 \times]0,1[$ s'il existe des trajectoires non fermées ou un fibré de Seifert à bord si toutes les trajectoires sont fermées. Les conditions de recollement font de M soit un fibré de Seifert, soit un fibré en tores.$\square$

Pour pouvoir considérer les feuilles de type temps il manque une connaissance des adhérences des feuilles d'un flot lorentzien. En fait il s'agirait de savoir quelles sont les variétés à bord possédant un flot riemannien ou lorentzien tangent au bord et riemannien sur le bord.

5.6 Une remarque sur la complétude géodésique.

Nous nous posons la question de la complétude géodésique des métriques rendant ces feuilletages totalement géodésiques. Nous aimerions reprendre les techniques utilisées par l'auteur dans [Mo2]. Cependant celles-ci nécessitent la présence d'un feuilletage géodésique de dimension 1. Or ici rien ne dit qu'un tel feuilletage soit présent. Par contre restreint aux feuilles compactes de type lumière de $\mathcal{F}$ le flot ϕ est géodésique de type lumière (nulprégéodésique si on reprend la terminologie de [Mo2]). Nous allons ici n'étudier que ces géodésiques. Le résultat obtenu ne concerne en fait que les géodésiques fermées d'une feuille de type lumière au voisinage de laquelle les feuilles de $\mathcal{F}$ ne changent pas de type.

Proposition 5.14 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage totalement géodésique de codimension* 1 *transversalement orientable sur une variété lorentzienne (M, g). Soit F une feuille de $\mathcal{F}$ de type lumière dont les feuilles voisines sont toutes de type espace ou toutes de type temps. On suppose de plus que F contient une géodésique c de type lumière fermée*[2]*. Cette géodésique est complète si et seulement si elle ne porte pas d'holonomie linéaire de $\mathcal{F}$.*

[2]la géodésique est dite fermée simplement si sa courbe se referme, son image dans le fibré tangent n'est pas forcément fermée.

Preuve. On commence par considérer, au voisinage de F un champ de vecteurs Y partout non nul, tangent à $\mathcal{F}$ et orthogonal à TF. Si les feuilles voisines de F sont de type temps, on choisit Y de type temps hors de F (on utilise par exemple une métrique riemannienne auxiliaire). Ensuite on construit un atlas adapté à $\mathcal{F}$ et à Y c'est-à-dire un système de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que $T\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(\partial x_1, \ldots, \partial x_{n-1})$ et que $\partial x_1 = Y$. En tout point de F une géodésique portée par Y s'écrit $c(t) = (x_1(t), 0, \ldots, 0)$ et l'équation d'Euler-Lagrange nous dit que :

$$\ddot{x}_1(t) + \Gamma^1_{1,1}(\dot{x}_1(t))^2 = 0,$$

où $\Gamma^1_{1,1}$ est un symbole de Christoffel. On note $g_{i\,j}$ les coefficients de la matrice de g dans ce sytème de coordonnées et $g^{i\,j}$ ceux de la matrice inverse. On a

$$\Gamma^1_{1,1} = 1/2 g^{1\,n}\left(2\partial_1 g_{1\,n} + \partial_n g_{1\,1}\right).$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse concernant le type des feuilles voisines de F. On voit que $g_{1\,1}$ atteint son minimum (ou maximum) sur F et donc $\partial_n g_{1\,1} = 0$. Sur la feuille F on a de plus $g^{1\,n} = 1/g_{1\,n}$. L'équation d'Euler-Lagrange devient

$$g_{1\,n}\ddot{x}_1(t) + \partial_1 g_{1\,n}(\dot{x}_1(t))^2 = 0$$

c'est-à-dire $g_{1\,n}\dot{x}_1(t) = C$. La constante C dépend uniquement de la vitesse initiale de la géodésique.

Une géodésique fermée est complète si et seulement si lorsqu'on l'a parcourue une fois on revient avec la vitesse initiale (elle est alors dite périodique). Si c est une courbe fermée on voit que c est complète si et seulement si après un tour on retrouve la même constante C. Le fait d'avoir choisi les coordonnées de telle sorte que $\partial x_1 = Y$ permet de «suivre» les constantes. Si l'on passe d'un ouvert de l'atlas U_j à un ouvert U_i par un changement de carte $\psi^{i,j}$, on relie les constantes C_i et C_j par $C_i = C_j\,\partial_n\psi^{i,j}_n$, où $\partial_n\psi^{i,j}_n$ désigne la dérivée par rapport à la $\mathrm{n}^{\mathrm{ieme}}$ coordonnée de la $\mathrm{n}^{\mathrm{ieme}}$ composante du changement de carte, c'est-à-dire de l'holonomie linéaire du feuilletage $\mathcal{F}$. Si après un nombre fini de changements de cartes on est revenu au point initial, on voit que la vitesse est la même si et seulement si le produit des dérivées est égal à 1, c'est-à-dire si le lacet c ne porte pas d'holonomie linéaire. □

On notera que la plupart des exemples construits plus haut ont des feuilles de type lumière sans holonomie linéaire. Il semble difficile de conjecturer quelque chose sur la complétude de ces métriques en général en l'état des connaissances.

Références

[A-S] J.L. Arraut, P.A. Schweitzer, *A note on actions of the cylinder* $S^1 \times R$, Topology and its applications 123 (2002) 533-535.

[B-M-T] C. Boubel, P. Mounoud, C. Tarquini, *Foliations admitting a transverse connection ; applications in dimension* 3, à paraître dans Ergodic Theory Dynam. Systems.

[C-C1] J. Cantwell et L. Conlon, *Foliations I*, Graduate Studies in Math., v. 23.

[C-C2] J. Cantwell et L. Conlon, *Ensets of exceptional leaves ; a theorem of G. Duminy*, preprint.

[Ca] Y. Carrière, *Flots riemanniens*, in *Structure transverse des feuilletages*, Toulouse 1982, Asterisque 116, pp. 31-52 (1984).

[C-G] Y. Carrière et E. Ghys, *Feuilletages totalement géodésiques*, An. Acad. Brasil Cienc. 53(3) pp. 427-432 (1981).

[E-H-N] D. Eisenbud, U. Hirsch et W. Neumann, *Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphism of the circle*, Comment. Math. Helv. 56 (1981) 638-660.

[G-N] R. Geoghegan et A. Nicas, *A Hochschild homology Euler characteristic for circle actions*, K-Theory 18 (1999), 99-135.

[Gh] E. Ghys, *Rigidité différentiable des groupes fuchsiens*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 78, (1993), 163-185.

[G-K] W. Goldman et Y. Kamishima, *The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic.* J. Differential Geom. 19 (1984), no. 1, 233-240.

[He] G. Hector, *Feuilletages en cylindres*, Lecture Notes in Math., 597, Springer Verlag, 1977, 252-270.

[Kl] B. Klingler, *Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante.* Math. Ann. 306 (1996), no. 2, 353–370.

[Mol] P. Molino, *Riemannian foliations*, Progress in mathematics, (1988)

[Mo1] P. Mounoud, *Dynamical properties of the space of Lorentzian metrics*, Comment. Math. Helv. 78 (2003) 463-485.

[Mo2] P. Mounoud, *Complétude et flots nul-géodésiques en géométrie lorentzienne*, Bulletin de la SMF 132 (2004), 463-475.

[M-R] R. Moussu et R. Roussarie, *Relations de conjugaison et de cobordisme entre certains feuilletages*, Publ. math. IHES, 43 (1973), 143-168.

[R-R] H. Rosenberg et R. Roussarie, *Reeb foliations*, Annals of Math., 91 (1970), 1-24.

[Sa] F. Salein, *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques*, Ann. Inst. Fourier 50 (2000), no. 1, 257–284.

[Le] G. Levit, *Feuilletages des variétés de dimension* 3 *qui sont des fibrés en cercles*, Comment. Math. Helv. 32 (1957-58), 215-223.

[Yo] K. Yokumoto, *Examples of Lorentzian geodesible foliations of closed three manifolds having Heegard splitting of genus one*, Tohoku Math. J., 56 (2004), 423-443.

[Wo] J.W. Wood, *Bundle with totally disconnected structure group*, Comment. Math. Helv. 46 (1971), 257-273.

[Ze1] A. Zeghib, *Geodesic foliations in Lorentz* 3-*manifolds*, Comment. Math. Helv. 74 (1999) 1-21.

[Ze2] A.Zeghib, *Isometry group and geodesic foliations of Lorentz manifolds. Part II : geometry of analytic Lorentz manifold with large isometry groups*, Geom. func. anal. Vol 9 (1999) 823-854.