Devoir surveillé du 9 mars, corrigé (succinct)

Exercice 1

Au-dessus de l'intervalle $[1/(n+1), 1/n]$, le graphe de f est de longueur minorée par $2/(n+1)$ ("le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite"). Donc au-dessus de $[1/N, 1]$, la longueur est minorée par $2\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} \sim 2\ln N$, fonction qui tend vers $+\infty$ avec N. Ainsi f n'est pas rectifiable.

Cela implique qu'elle ne peut pas être $\mathcal{C}^1$: sinon f' serait continue donc bornée sur le compact $[0,1]$, et l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1+f'^2(t)}dt$ convergerait.

Exercice 2

1. Avec les notations de l'énoncé, $\beta' = T\nu$, donc si T est uniformément nulle alors β est constant, disons égal à un vecteur v. Ainsi

$$\langle f, \beta\rangle' = \langle f', \beta\rangle + \langle f, \beta'\rangle = \langle \tau, \beta\rangle = 0$$

et $\langle f, \beta\rangle = \langle f, v\rangle$ est un nombre constant c. Donc f est contenue dans le plan affine d'équation $\langle \cdot, v\rangle = c$.

2. (a) Que A soit dans une sphère de centre 0 équivaut à ce que $\|f\|^2$ soit constante, donc

$$0 = (\|f\|^2)'' = (2\langle f, f'\rangle)' = (2\langle f, \tau\rangle)' = 2\langle f, \tau'\rangle + 2\|\tau\|^2 = 2\langle f, K\nu\rangle + 2.$$

D'où $K\langle f, \nu\rangle = -1$, ce qui impose $K \neq 0$ et $\langle f, \nu\rangle = -1/K$.

(b) On en déduit $0 = \langle f, \nu\rangle' = \langle \tau, \nu\rangle + \langle f, \nu'\rangle = \langle f, -K\tau - T\beta\rangle$, soit $T\langle f, \beta\rangle = -K\langle f, \tau\rangle = 0$ (on a vu que $0 = (\|f\|^2)' = 2\langle f, \tau\rangle$).

(c) Supposons qu'il existe t_0 de I avec $T(t_0) \neq 0$. Par continuité (l'arc est supposé lisse), T n'est jamais nulle sur un intervalle ouvert J contenant t_0, sur lequel le fait que $T\langle f, \beta\rangle = 0$ implique $\langle f, \beta\rangle = 0$. Mais alors $0 = \langle f, \beta\rangle' = \langle \tau, \beta\rangle + \langle f, T\nu\rangle = T\langle f, \nu\rangle$ d'où $\langle f, \nu\rangle = 0$. Cela contredit 2.(a) ci-dessus. (On peut aussi poursuivre en disant que, sur J, on a $\langle f, \nu\rangle = \langle f, \beta\rangle = \langle f, \tau\rangle = 0$, et (τ, ν, β) étant une base de $\mathbf{R}^3$, $f_{|J} = 0$. Or $f(t)$ appartient à une sphère également (sur tout I), qui ne peut plus qu'être de rayon nul : f est constante. Pourtant $R > 0$). Cette contradiction montre que T est uniformémement nulle sur I.

D'après la question 2), cela implique que f appartient à un plan, et à la sphère, donc au cercle qu'est leur intersection.

Exercice 3

1. La différentielle de f est $df(x_1, x_2, x_3) = 2(x_2x_3 + x_1, x_1x_3 + x_2, x_1x_2 + x_3)$. Si cette différentielle est nulle on obtient, en multipliant les composantes du vecteur précédent par x_1 ou x_2 que $x_1x_2x_3 + x_1^2 = 0$ et $x_1x_2x_3 + x_2^2 = 0$ d'où, en remplaçant dans l'équation $f = 0$, $x_3^2 = 1$. Symétriquement, $x_2^2 = 1 = x_1^2$. Ainsi $(x_1, x_2, x_3) = (\pm1, \pm1, \pm1)$. L'équation $f = 0$ à nouveau montre que le produit des signes est -1. Ainsi les points de Σ au voisinage desquels h n'est pas une submersion sont-ils les $A_1, \ldots, A_4$ de l'énoncé. Et $\Sigma \setminus \{A_1, \ldots, A_4\}$ est bien une sous-variété de dimension 2.

2. Si l'on remplace (x_1, x_2, x_3) par $(\eta_1 x_{\sigma(1)}, \eta_2 x_{\sigma(2)}, \eta_3 x_{\sigma(3)})$, on voit que pour que l'équation $f = 0$ soit vérifiée pour tous les (x_1, x_2, x_3) de Σ il faut (et suffit) que $\eta_1\eta_2\eta_3 = 1$. Donc

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \{(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)\}.$$

On vérifie alors que l'ensemble des A_i est permuté par chaque bijection F associée.

3. La droite (A_1, A_2) est $\{(1,1,-1) + t(0,-2,2) = (1, 1-2t, -1+2t), t \in \mathbf{R}\}$. Un calcul immédiat montre que les points $(1, 1-2t, -1+2t)$ vérifient l'équation de Σ, donc (A_1A_2) est contenue dans Σ. On en déduit, en appliquant des transformations du type de la question précédente, que les autres droite $(A_iA_j), 1 \leq i < j \leq 4$ le sont aussi.

Chacune des trois droites (A_1A_j), $2 \leq j \leq 4$, définit un arc sur Σ qui contient A_1, et en lequel la direction tangente est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{A_1A_j}$. Or ces trois vecteurs forment clairement une base de $\mathbf{R}^3$. Ainsi l'espace tangent à Σ en A_1 n'est-il pas un plan, et celle-ci n'est pas lisse en A_1. Par symétrie la même chose vaut pour les autres A_i, et $\Sigma \setminus \{A_i\}_{1\leq i\leq 4}$ est le plus grand sous-ensemble de Σ qui soit une variété.

4. Sur la sphère S, d'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, les points de Σ vérifient aussi $x_1x_2x_3 = 0$. Donc $\Sigma \cap S$ est la réunion des intersections de S avec les trois plans d'équation $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$. Les intersections de ces trois grands cercles sur la sphère sont à leur tour visiblement non lisses en tant que points de la courbe $\Sigma \cap S$ (car tout voisinage suffisamment petit d'un tel point dans $\Sigma \cap S$ ressemble à une croix), qui n'est donc pas une sous-variété (de dimension 1).