ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018

Licence de Mathématiques — Université de Bordeaux

Devoir Surveillé de Géométrie Différentielle
Date : 13/03/2018 **Heure : 11h** **Durée : 1h30**

Documents et calculatrice : Non autorisés.

Les exercices sont indépendants, ils peuvent être fait dans l'ordre de son choix.

Question de cours

Soit A un arc birégulier lisse de $\mathbf{R}^3$. Montrer que si la torsion de A est partout nulle alors A est contenu dans un plan affine.

Exercice 1

Soient A est un arc géométrique lisse birégulier de $\mathbf{R}^3$ et (I, f) un paramétrage par longueur d'arc de A. Le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion de A en $f(t)$ sont notés respectivement $(\tau_A(t), \nu_A(t), \beta_A(t))$, $K_A(t)$ et $T_A(t)$. On appelle *normale principale de A en $f(t)$*, la droite affine passant par $f(t)$ et de vecteur directeur $\nu_A(t)$.

$\boxed{\text{On suppose qu'il existe deux réels } r \neq 0 \text{ et } c \text{ tels que } r\,K_A + c\,T_A = 1.}$

1) Montrer que l'arc B paramétré par (I, g) défini par $g(t) = f(t) + r\nu_A(t)$ est régulier si et seulement si la torsion de A ne s'annule pas. À quelle condition (portant sur T_A) B est-il birégulier ?
2) Montrer pour tout $t \in I$ que la normale principale de A en $f(t)$ est perpendiculaire à $g'(t)$.
3) Soit $t_0 \in I$ tel que $g(t_0)$ est un point birégulier de B. Montrer que la normale principale de A en $f(t_0)$ est égale à la normale principale de B en $g(t_0)$.
4) On suppose maintenant que $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$. Montrer que pour tout $r \neq 0$, il existe c tel que $r\,K_A + c\,T_A = 1$. Quels sont les arcs obtenus par la construction ci-dessus ?

Exercice 2

Soient $\mathbf{C} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1/4\}$ et $\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^3$.

1) Montrer que $\mathbf{C}$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$. Donner une équation du plan affine tangent à $\mathbf{C}$ en $(1, 0, 0)$.
2) Montrer que $\mathbf{C} \cap \mathbf{S}^2 \setminus \{(1, 0, 0)\}$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
3) Trouver une immersion lisse F de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ d'image $\mathbf{C}$. En déduire un paramétrage de $\mathbf{C} \cap \mathbf{S}^2$.
4) Faire un dessin approximatif mais lisible de $\mathbf{C} \cap \mathbf{S}^2$.