**Licence de Mathématiques, parcours mathématiques fondamentales**
Université de Bordeaux

**Géométrie Différentielle (4TMF602U)** **5/03/2019** **durée : 1h30**

Épreuve de M. Mounoud — Documents interdits, calculette homologuée autorisée

Dans la suite, on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

## Question de cours

Donner la définition du trièdre de Frenet d'un arc orienté birégulier de $\mathbb{R}^3$ et donner (sans preuve) les formules de Frenet.

## Exercice 1

Soit $A$ un arc *birégulier* lisse orienté de $\mathbb{R}^2$ et $(I, f)$ un paramétrage de $A$ par *longueur d'arc*. Pour tout $t \in I$, on note $\tau(t)$ le vecteur $f'(t)$ et $\nu(t)$ le vecteur tel que $(\tau(t), \nu(t))$ est une base orthonormée directe.
On note $k(t)$ la courbure algébrique de $A$ au point $f(t)$.
On note $D_t$ la normale à $A$ au point $f(t)$ *i.e.* la droite affine passant par $f(t)$ et de vecteur directeur $\nu(t)$.

On cherche un arc paramétré lisse $(I, g)$ tel que pour tout $t \in I$ la droite $D_t$ soit la tangente à $(I, g)$ au point $g(t)$. Un tel arc est appelé une *développée* de $A$.

1) Montrer que si $g$ existe alors il existe une fonction lisse $\ell : I \to \mathbb{R}$ telle que $g = f + \ell\nu$.
2) Pour tout $t \in I$, déterminer l'expression de $\nu'(t)$ dans la base $(\tau(t), \nu(t))$.
3) Calculer $\langle g', \tau \rangle$. En déduire que $A$ a une unique développée et que son support est le lieu des centres des cercles osculateurs de $A$.
4) À quelle condition l'arc $(I, g)$ est-il régulier ?
5) On suppose maintenant que la fonction $k$ est *positive et strictement croissante.*
   Pour tout $t_1 \leq t_2 \in I$ calculer la longueur de l'arc $g([t_1, t_2])$.
   En déduire que le cercle osculateur à $A$ en $f(t_1)$ contient celui en $f(t_2)$ (on pourra commencer par majorer $\|g(t_1) - g(t_2)\|$).

## Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y, z) = x^2 z - y^2$.

1) Trouver le plus grand ouvert $U$ tel que la restriction de $f$ à $U$ soit une submersion. En déduire que pour tout réel $c$ *non nul*, $X_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 z - y^2 = c\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
2) Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(u, v) = (u, uv, v^2)$. Montrer que $\Phi$ est une immersion. Est-elle injective ?
3) Montrer que $\Phi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \subset f^{-1}(0)$. Décrire $f^{-1}(0) \setminus \Phi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.