Licence de Mathématiques, parcours mathématiques fondamentales
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Géométrie Différentielle (4TMF602U) **27/02/2020** **durée : 1h30**

Épreuve de M. Mounoud Documents interdits, calculette homologuée autorisée

Exercice 1

On considère la courbe, appelée chaînette, paramétrée par l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t, \cosh(t))$ (on rappelle que $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$).

1) Soient $t_1 < t_2$ deux réels. Déterminer la longueur de l'arc de chaînette $f([t_1, t_2])$.
2) Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ une application lisse. Montrer que K la courbure du graphe de φ est donnée par
$$K(t) = \frac{|\varphi''(t)|}{(1 + \varphi'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$
3) Déterminer la courbure de la chaînette.

Exercice 2

Soit A un arc géométrique orienté et birégulier de $\mathbb{R}^3$. Soit (I, f) un paramétrage par longueur d'arc de A. On note $(\tau(t), \nu(t), \beta(t))$ le trièdre de Frenet de A au point $f(t)$; on note $K(t)$ et $T(t)$ la courbure et la torsion de A au point $f(t)$.

1) Rappeler les formules de Frenet qui donnent τ', ν' et β' en fonction de τ, ν et β.
2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (i) Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que
   $$\forall t \in I,\ a\tau(t) + b\beta(t) = v$$
   (ii) $\dfrac{T}{K}$ est constant.
3) Quitte à changer de repère orthonormé on peut supposer que v est colinéaire à $(1, 0, 0)$. Montrer qu'alors $f(t) = (ct + d, g(t))$ où c, d sont dans $\mathbb{R}$ et g est une fonction lisse de I dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\|g'(t)\|$.

Exercice 3

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application lisse à valeurs strictement positives. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(u, v) = (\varphi(u)\cos(v), \varphi(u)\sin v, u)$ et $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - \varphi(z)^2$.

1) Montrer que f est une immersion lisse.
2) Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = h^{-1}(0)$. On note cet ensemble M.
3) Donner une expression en fonction de φ du plus grand ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ tel que la restriction de h à U soit une submersion.
4) Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
5) Dessiner M lorsque $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.