Licence de Mathématiques, parcours mathématiques fondamentales
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Géométrie Différentielle (4TMF602U) **24/04/2017** **durée : 3h00**

Épreuve de M. Mounoud Documents interdits, calculette homologuée autorisée

Exercice 1

Soit (I, γ) un arc lisse *birégulier* de $\mathbb{R}^3$ *paramétré par longueur d'arc*. On note $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ le repère de Frenet de cet arc au point $\gamma(s)$ et $K(s)$ et $T(s)$ la courbure et la torsion en ce point. Soit f l'application de $I \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(s,t) = \gamma(s) + t\,\tau(s)$.

1) Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial s}(s,t)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(s,t)$ dans la base $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$. En déduire que f est une immersion lisse. On désigne par Σ la nappe définie par $(I \times \mathbb{R}_+^*, f)$.
2) Dessiner Σ lorsque $I = \mathbb{R}$ et $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$.
   On suppose à nouveau que γ est un arc lisse birégulier quelconque.
3) Donner l'expression de la première forme fondamentale dans les coordonnées $(I \times \mathbb{R}_+^*, f)$. Comparer les expressions obtenues lorsque $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$ et lorsque $\gamma(s) = \frac{1}{2}(\cos(\sqrt{2}\,s), \sin(\sqrt{2}\,s), \sqrt{2}\,s)$.
4) Pour éviter les confusions, on désigne par λ (au lieu de ν_Σ) l'application de Gauss de Σ. Montrer que
$$\forall (s,t) \in I \times \mathbb{R}_+^*,\ \lambda(f(s,t)) = -\beta(s).$$
   Donner la matrice de l'endomorphisme de Weingarten dans la base $(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})$. En déduire la courbure de Σ. À quelle condition l'endomorphisme de Weingarten de Σ est-il partout nul ?

Exercice 2

Soit X le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $X = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\right\}$.

1) Montrer que X est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer $\{(x,y,z) \in X ; x = 0, y > 0\}$. Montrer que X est invariante par rotation d'axe $\mathbb{R}(0,0,1)$. En déduire un dessin de X.
3) Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $h(x,y,z) = x$. Déterminer les 4 points critiques de la restriction de h à X.
4) Montrer que $(X \cap h^{-1}(1)) \setminus \{(1,0,0)\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Préciser sa dimension.
5) Montrer[1] que l'image de la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$\gamma(t) = \left(1, \frac{2\sqrt{2}\sin(t)}{1+\cos^2(t)}, \frac{2\sqrt{2}\cos(t)\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\right)$$
   est contenue dans $X \cap h^{-1}(1)$. Comparer $\gamma'(0)$ et $\gamma'(\pi)$, en déduire que $X \cap h^{-1}(1)$ n'est pas une sous-variété.

1. on commencera par indiquer clairement quel calcul doit être fait pour répondre à la question

Exercice 3

1) Pour tout nombre réel $a > 0$, on définit la 1-forme différentielle β_a sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par

$$\beta_a = \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{(x^2+y^2)^a}$$

   a) Pour quelles valeurs de a la 1-forme β_a est-elle fermée ?

   b) Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Pour tout $a > 0$, calculer

$$\int_\gamma \beta_a.$$

   c) Pour quelles valeurs de a la 1-forme β_a est-elle exacte ?

2) Soit σ la 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ définie par

$$\sigma = \frac{x\, dy \wedge dz - y\, dx \wedge dz + z\, dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

   a) Montrer que σ est fermée.

   b) Soit $f : \mathbb{R} \times]-1, 1[\to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ l'application définie par

$$f(u,v) = (\sqrt{1-v^2}\, \cos(u), \sqrt{1-v^2}\, \sin(u), v)$$

      i) Montrer que f est lisse et calculer sa jacobienne.

      ii) Calculer $f^*\sigma$.