Université de Bordeaux 2021-2022
Master MEEF – Mathématiques –

Géométrie - Feuille 1

Exercice 1

- **a.** Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. Montrer que ABC et $A'B'C'$ sont isométriques (ie superposable par une isométrie).
- **b.** Donner deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $AC \neq A'C'$.
- **c.** Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Montrer que ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.
- **d.** Montrer que ABC est isocèle en A si et seulement si $\widehat{B} = \widehat{C}$.
- **e.** Montrer que la médiatrice du segment $[AB]$ est $\{M \mid AM = BM\}$. En déduire que les médiatrices des côtés d'un triangle ABC sont concourantes.
- **f.** Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $AC = A'C'$. Montrer que ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Exercice 2 Soit ABC un triangle, on note M le milieu de $[AC]$ et D le symétrique de B par rapport à M.

1. (a) Montrer que $A \in [\widehat{BCD}]$.
   (b) En déduire que $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = \widehat{BCD}$ et donc que $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} <$ un plat.
2. (a) Soient d et d' deux droites. Soient A et $B \in d$ et C et $D \in d'$ tels que B et D soient de part et d'autre de (AC). Montrer que d et d' sont parallèles si et seulement si $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$.
   (b) Montrer que la somme des angles d'un triangle est égale à un plat.
3. (a) Montrer que $\widehat{A} \leq \widehat{B} \leq \widehat{C} \Leftrightarrow BC \leq AC \leq AB$ (pour $BC < AC \Rightarrow \widehat{A} < \widehat{B}$ on pourra considérer $B' \in [CA]$ tel que $B'C = BC$).
   (b) Montrer l'inégalité triangulaire.

Exercice 3

- **a.** Montrer que les côtés opposés d'un parallélogramme sont de mêmes longueurs et que ses diagonales se coupent en leur milieu.
- **b.** Montrer qu'un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.
- **c.** Montrer qu'un quadrilatère non croisé (convexe) ayant une paire de côtés parallèles et de mêmes longueurs est un parallélogramme.
- **d.** Soit ABC un triangle et C' le milieu de $[AB]$. Montrer que la parallèle à (BC) passant par B' coupe $[AC]$ en son milieu.

Exercice 4

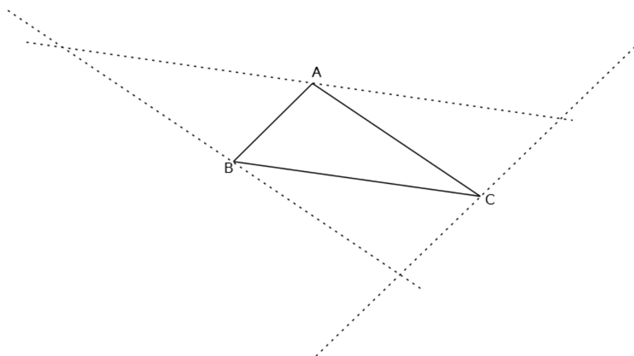
a. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si la médiane issue de A, la hauteur issue de A et la médiatrice du segment $[BC]$ sont la même droite.

b. Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

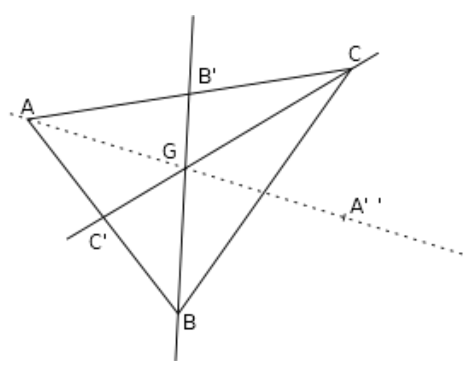
c. Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses deux diagonales ont la même longueur.

Exercice 5

a. En vous aidant de la figure ci-dessous, montrer que les hauteurs du triangle sont concourantes ; on note H le point de concours appelé orthocentre.



b. En vous aidant de la figure ci-dessous, montrer que les médianes du triangle sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle situé aux deux tiers de chacune d'elles.



c. Droite d'Euler. On note Ω le point du plan tel que H, G et Ω sont alignés dans cet ordre et $GH = 2\,G\Omega$. Que peut-on dire des droites $(\Omega A')$, $(\Omega B')$ et $(\Omega C')$?

En déduire que G, H et O sont alignés, et que G est aux deux tiers du segment $[HO]$.