Université de Bordeaux 2021-2022
Master MEEF – Mathématiques –

Géométrie - Feuille 2 - Aire et angles

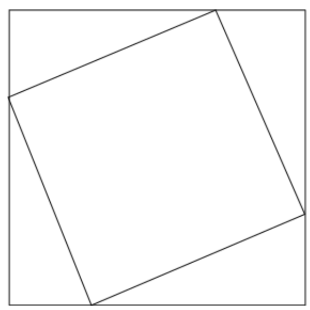
Aire

On admet qu'un polygone du plan P a une aire bien définie, notée $\mathcal{A}(P)$, que celle-ci est invariante par isométrie et par découpage et qu'un rectangle de côtés de longueurs a et b a pour aire ab.

Exercice 1 (lemmes fondamentaux)

1. Soit $P = ABCD$ un parallélogramme. Montrer que $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ACD) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(P)$.
2. Soit $M \in [CD]$. Montrer que $\mathcal{A}(AMB) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(P)$.
3. Soit ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$. Montrer que $\mathcal{A}(AA'C) = \mathcal{A}(ABA')$.
4. Soient ABC et DBC deux triangles. Montrer que si (AD) est parallèle à (BC) alors $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(DBC)$ (on pourra considérer les paralléles à (AB) passant par D et C).
5. Déduire de **d.** la formule usuelle donnant l'aire d'un triangle.

Exercice 2
Déduire de la figure ci-dessous une preuve du théorème de Pythagore.



En déduire, la formule dites d'Al-Kashi pour un triangle à angles aigus. Que se passe-t-il si l'angle est obtus ?
Puis déduire de cette formule que l'aire d'un triangle de côtés a, b, c est égale à $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ est le demi-périmètre (formule de Héron).

Exercice 3 (Thalès)
Soit ABC un triangle. Soient $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$ tels que $(B'C')$ soit parallèle à (BC).

1. Montrer que
$$\frac{\mathcal{A}(BCC')}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{CC'}{CA} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{A}(BCB')}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{BB'}{BA}.$$
2. En déduire que $\dfrac{CC'}{CA} = \dfrac{BB'}{BA}$ puis que $\dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{AB'}{AB}$.
3. On trace la parallèle à (AB) passant par C', elle coupe (BC) en C''. Montrer que
$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{\mathcal{A}(ABC'')}{\mathcal{A}(ABC)}.$$
En déduire, que $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{AC'}{AC}$.

Exercice 4 (formule de Gergonne) Soient ABC un triangle et O un point intérieur au triangle. On note A', B' et C' les points d'intersection des droites $(OA), (OB)$ et (OC) avec les côté du triangle. Montrer que
$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$
(on remarquera que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implique $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$).

Angles

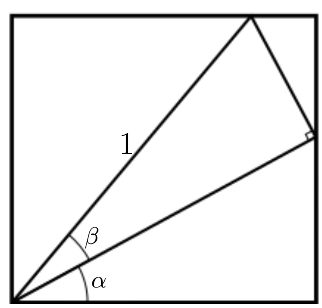
Exercice 5 Théorème de l'angle au centre.

1. Montrer qu'un triangle ABC est rectangle en A si et seulement O le centre de son cercle circonscrit est le milieu de $[BC]$. Comparer alors les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$.
2. On considère un triangle ABC et O le centre de son cercle circonscrit. Montrer que l'angle du secteur $[\widehat{AOB}]$ ne contenant pas C (et qui n'est pas forcément saillant) est le double de l'angle $\widehat{ACB}$ (on considérera le symétrique de C par rapport à O).
3. On considère quatre points A, B, C et D du plan formant un quadrilatère non croisé et dont les angles sont saillants (c'est à dire un quadrilatère convexe).
   (a) Montrer qu'il existe un cercle passant par les quatre points (on dit alors que le quadrilatère est *inscriptible*) si et seulement si les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont égaux.
   (b) Énoncer et démontrer une propriété analogue concernant les angles (opposés dans le quadrilatère) $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ et caractérisant les quadrilatères inscriptibles.

Exercice 6 Soient ABC un triangle acutangle, P, Q, R les pieds de ses hauteurs et H son orthocentre.

1. Montrer que $P \in [BC]$ (P étant le pied de la hauteur issue de A).
2. Montrer que les points A, B, P et Q sont cocycliques.
3. Montrer que A, H, Q, R sont cocycliques.
4. Montrer que la hauteur $[RC)$ est la bissectrice du secteur $[\widehat{PRQ}]$.

Exercice 7 Compléter la figure suivante (angles et longueurs) en fonction de α et β. En déduire des expressions de $\cos(\alpha+\beta)$ et de $\sin(\alpha+\beta)$.



Exercice 8

En approche d'une côte, les marins d'un bateau veulent estimer la hauteur de la falaise qu'ils approchent. Ils ne savent évidemment pas à quelle distance ils se trouvent de la falaise.

À un certain instant, ils mesurent un angle de 25° entre l'horizontale et la ligne qui les joint au sommet de la falaise. Quelque temps plus tard, une nouvelle mesure donne un angle de 34°.

Sachant que le navire a parcouru 64 mètres entre les deux mesures, déterminer la hauteur de la falaise et la distance du navire à la falaise au moment des deux mesures.

Exercice 9

Une régate de voiliers s'effectue sur un trajet triangulaire ABC, le départ et l'arrivée se faisant au point D projeté orthogonal de B sur le côté $[AC]$, et avec passages par D, A, B, C et de nouveau D dans cet ordre.

On possède les informations suivantes :

$$AB = 3 \text{ milles nautiques}, \qquad \widehat{DAB} = 54°, \qquad \widehat{ABC} = 80°.$$

Quelle est la longueur du parcours en milles nautiques ?