Université de Bordeaux 2022-2023
Master MEEF – Mathématiques –

Géométrie
— Vecteurs —

Exercice 1 Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Soit A' le milieu de $[BC]$.

1. Soit M un point du plan. Comparer $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA'}$. En déduire qu'il existe un point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
2. Montrer que G est le point de concours des médianes de ABC.
3. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC et H tel que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Écrire $\overrightarrow{OH}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$. En déduire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$. Qui est H ?
4. Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$. Montrer qu'il existe M tel que $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$. En déduire qu'il existe un unique point P tel que $a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$.
5. Quel est le lieu des points M vérifiant $a\,AM^2 + b\,BM^2 = 1$?

Exercice 2 L'homothétie de centre O et de rapport $k \neq 0$ est l'application h qui envoie un point M sur le point M' vérifiant $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$.

1. Montrer que h est bijective.
2. Soient M et N deux points du plan. Montrer que $\overrightarrow{h(M)h(N)} = k\,\overrightarrow{MN}$. Que peut-on dire des droites (MN) et $(h(M)h(N))$?
3. Soit ℓ un réel non nul. Montrer qu'une application f vérifiant $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \ell\,\overrightarrow{MN}$ est une homothétie ou une translation (on cherchera $(M(f(M)) \cap (Nf(N)))$.
4. En déduire que la composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation. Qu'en est-il de la composée d'une homothétie et d'une translation ?

Exercice 3 Soient A, B, C et J quatre points du plan.

1. Montrer que
$$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$
En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourrantes.
2. On suppose maintenant que $B \neq C$ et $J \in (BC)$. On note ℓ le réel tel que $\overrightarrow{JC} + \ell\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{0}$.
   (a) À l'aide du produit scalaire, montrer la relation de Stewart :
   $$\ell AB^2 + AC^2 = (\ell + 1)(\ell BJ^2 + AJ^2)$$
   En déduire une expression du carré de la longueur de la médiane issue de A du triangle ABC en fonction des longueurs des côtés.

(b) Montrer que la mediane issue de B est orthogonale à celle issue de C si et seulement si
$$AB^2 + AC^2 = 5BC^2$$
(on pourra utiliser les propriétés élémentaires du centre de gravité d'un triangle sans les redémontrer).
Quels sont les triangles rectangles ayant cette propriété ?

Exercice 4 Cercles d'Apollonius.

Soient A et B deux points distincts du plan et O le milieu de $[AB]$. On s'intéresse à $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des points M du plan vérifiant $AM/BM = k$, où k est un réel strictement positif.

1. Montrer que $AM/BM = k$ si et seulement si les deux vecteurs $\overrightarrow{MA} + k\,\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} - k\,\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.
2. Déterminer les points de $\mathcal{A}_k \cap (AB)$.
3. Identifier le lieu des points M quand la constante k vaut 1.
4. On suppose dorénavant $k \neq 1$. Montrer qu'il existe P et Q dans $\mathcal{A}_k \cap (AB)$ tels que pour tout point M du plan,
$$\overrightarrow{MA} + k\,\overrightarrow{MB} = (1+k)\,\overrightarrow{MP} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} - k\,\overrightarrow{MB} = (1-k)\,\overrightarrow{MQ}.$$
5. Montrer que $\mathcal{A}_k$ est le cercle de diamètre $[PQ]$.
6. Soient I le milieu de $[PQ]$, O celui de $[AB]$. Montrer que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = OA^2$ et que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = OI^2 - IP^2$. En déduire que le cercle $\mathcal{A}_k$ est orthogonal à tous les cercles passant par A et B.

Exercice 5 On considère un rectangle $OABC$ et un point D. Soient E sur (BC) et F sur (OC) sont tels que $CFDE$ est un rectangle.

1. Choisir un repère du plan. Déterminer les équations des droites (OE), (AD) et (BF) dans ce repère.
2. Montrer que ces trois droites sont concourantes ou parallèles.

Exercice 6 $ABCD$ est un carré de côté c, M et N sont des points des segments $[AB]$ et $[AD]$ tels que $AM = AN$. Le point I est le milieu du segment $[DM]$. Montrer que les droites (AI) et (BN) sont perpendiculaires.

Exercice 7 On considère les quatre points $B : (8,0), C : (3,0), D : (0,3), E : (0,8)$. Quelle est l'aire du triangle délimité par les droites (BD), (BE) et (CE) ?

Exercice 8 $ABCD$ est un carré de côté a. M est un point quelconque de la droite (BD), qui se projette orthogonalement en P sur la droite (AB) et en Q sur la droite (AD). Démontrer que la droite Δ menée par M et perpendiculaire à la droite (PQ) passe par un point fixe.