V Théorie locale, stabilité, points d'équilibre hyperbolique

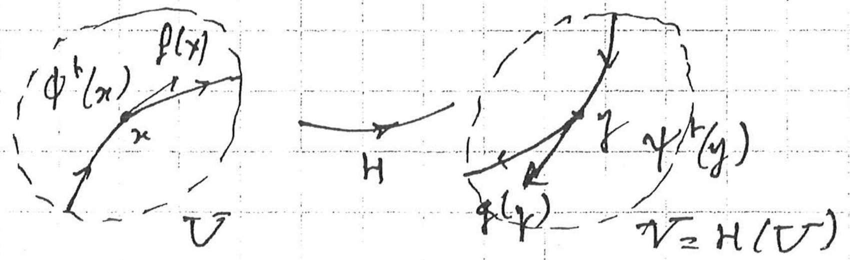
48. Notations et objectifs. On considère un système dynamique non linéaire donné par une EDO

$$\dot{x} = f(x)$$

où : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On s'intéresse au comportement local des trajectoires au voisinage d'un point x_* et plus particulièrement au voisinage d'un point d'équilibre $f(x_*) = 0$. Une question importante : les trajectoires de l'équation linéarisée décrivent-elles bien celles de l'équation originale ?

Dans une première partie, on se débarrasse des points x_* qui ne sont pas d'équilibre : nous allons voir alors que l'allure locale des trajectoires est triviale.

49. Proposition (Transformation par difféomorphisme).



on considère un S.D. local dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$: $\dot{x} = f(x)$. On considère un difféomorphisme $H : U \to V$ (de classe $\mathcal{C}^3$). On appelle $\{\Phi^t(x)\}_t$ le flot local sur U et on note

$$\psi^t(y) = H \circ \Phi^t \circ H^{-1}(y), \quad \forall y \in V$$

C'est encore un flot local ($\psi^{s+t} = \psi^s \circ \psi^t$). C'est en fait le flot du champ de vecteur image $\dot{y} = g(y)$ avec

$$g(y) = DH(H^{-1}(y)) \circ f \circ H^{-1}(y).$$

(où $DH(x)$ est la différentielle de H en x). On note

$$g = H_* f$$

(*) On dira que H conjugue les 2 flots

<u>preuve</u> L'énoncé est long, la preuve est courte :

$$\frac{d}{dt} H\circ\phi^t(x) = DH(\phi^t(x))\cdot f(\phi^t(x))$$

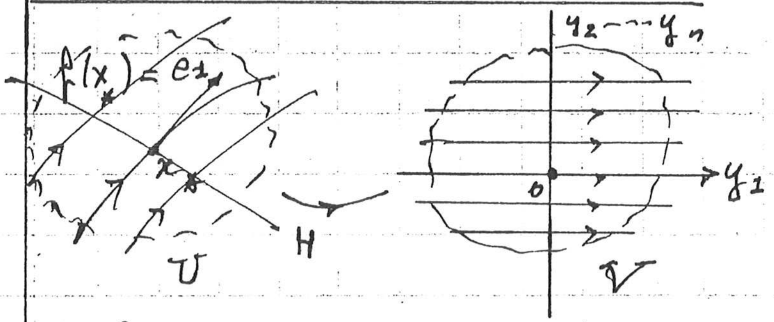
on pose $\psi^t(y) = H\circ \phi^t \circ H^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi^t(y) &= DH(\phi^t(H^{-1}(y)))\cdot f(\phi^t(H^{-1}(y))) \\ &= DH(H^{-1}(\psi^t(y)))\cdot f(H^{-1}(\psi^t(y))) \\ &= g(\psi^t(y))\end{aligned}$$

avec $g(y) = DH(H^{-1}(y))\cdot f(H^{-1}(y))$.

(*)

50. <u>Théorème (redressement local)</u>



On considère un point x_* qui n'est pas d'équilibre $f(x_*) \neq 0$. Alors on peut redresser localement le champ de vecteur pour qu'il devienne constant : il existe un voisinage ouvert U de x_* et un difféomorphisme $H : U \to V$ sur un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$H_* f = e_1$$

c'est à dire : les trajectoires $\psi^t(y) = H\circ\phi^t\circ H^{-1}(y)$ sont

$$\text{ou} \begin{cases} \dot y = e_1 \\ y_1 = t e_1 + y_1(0), \quad y_i = y_i(0) \quad \forall i = 2 --- 3 \end{cases}$$

<u>Preuve</u> On choisit arbitrairement une transversale linéaire à $e_1 := f(x_*)$ engendrée par des vecteurs $(e_2 — e_n)$. Puis on identifie tout aussi arbitrairement cette transversale avec $\{y_1 = 0\}$ dans $\mathbb{R}^n$, par exemple

$$\tilde K : (y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow x_* + \sum_{i=2}^n y_i e_i$$

On cherche à construire plutôt $K = H^{-1}$. Le flot de $g(y) = e_1$ est

$$\psi^t(y) = (y_1 + t, y_2, \dots, y_n)$$

En particulier

$$\psi^{y_1}(0, y_2 — y_n) = y$$

Si K conjugue les 2 flots ψ^t et ϕ^t et étend $\tilde{K}$, alors

$$K(y) = K \circ \psi^{y_1}(0, y_2 - y_n) = \phi^{y_1} \circ K(0, y_2 - y_n)$$
$$= \phi^{y_1}(x_* + \textstyle\sum_{i=2}^n y_i e_i)$$

En particulier K est uniquement déterminé localement en 0.

Réciproquement, si $K(y)$ est défini localement autour de 0 par

$$K(y) = \Phi^{y_1}(x_* + \textstyle\sum_{i=2}^n y_i e_i)$$

on a bien $K(0) = x_*$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial y_1}(0) = \dfrac{d}{dt}\phi^t(x_*)\Big|_{t=0} = f(x_*) = e_1 \\ \dfrac{\partial K}{\partial y_i}(0) = e_i \qquad \forall i = 2 \dots n \end{cases}$$

En particulier $DK(0)$ est une bijection linéaire et K devient donc un difféomorphisme local de 0 sur x_* d'inverse H^{-1}. En notant toujours ψ^t le flot constant précédent on a pour y proche de 0 et t proche de 0 :

$$K(\psi^t(y)) = K(y_1 + t, y_2 - y_n)$$
$$= \phi^{y_1 + t}(x_* + \textstyle\sum_{i=2}^n y_i e_i)$$
$$= \phi^t \phi^{y_1}(x_* + \textstyle\sum_{i=2}^n y_i e_i)$$
$$= \phi^t(K(y))$$

ou bien en prenant $H = K^{-1}$, pour tout $x \sim x_*$ et $t \sim 0$,

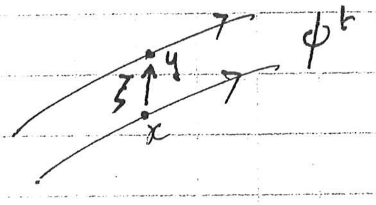
$$\psi^t \circ H(x) = H \circ \phi^t(x)$$

En différentiant par rapport à t, pour $t = 0$.

$$e_1 = DH(x) \cdot f(x)$$

ou bien $H_* f = e_1$.

5) Linéarisation autour d'une orbite



On considère une trajectoire $\phi^t(x)$ passant par x et un déplacement petit $\xi = y - x$ de la condition initiale. On pose

$$x_t = \phi^t(x) \quad , \quad y_t = \phi^t(y)$$
$$y_t = \phi^t(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^t(x)}{\partial x_i} \cdot \xi_i + o(\xi)$$

où $o(\xi)$ est une fonction négligeable devant ξ, uniformément sur tout intervalle $[-T, T]$. On pose

$$\xi_t = D\phi^t(x) \cdot \xi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^t(x)}{\partial x_i} \xi_i$$

On cherche à montrer que ξ_t satisfait aussi à une équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\xi_t = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \phi^t(x)}{\partial x_i \partial t} \xi_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f(\phi^t(x)) \right] \xi_i$$

$$= Df(\phi^t(x)) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^t(x)}{\partial x_i} \xi_i$$

$$= Df(x_t)\xi_t$$

On appelle linéarisé de l'EDO $\dot{x} = f(x)$, l'équation

$$\xi' = Df(x_t)\xi$$

C'est une équation linéaire mais dépendant en général du temps.

52 Exemple On peut ne pas s'arrêter au terme linéaire du développement et obtenir les termes d'ordre supérieur. Par exemple pour l'équation du pendule.

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0.$$

autour de $\theta_0 = \dot{\theta}_0 = 0$: le cas des petites oscillations.

$$\theta_t = \dot{\theta}_t = 0 \quad \forall t \text{ si } \theta_0 = \dot{\theta}_0 = 0.$$

Alors l'équation linéarisée est obtenue en développant $\sin\theta$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots\right) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

On considère des conditions initiales

$$\theta_0 \sim \ , \dot{\theta}_0 = 0$$

Alors la solution linéaire est

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$$

On peut chercher des termes d'ordre supérieur

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $(\theta, \dot\theta)$ admet un développement par rapport à θ_0

$$\theta(\theta_0, t) = \theta_0 u_1(t) + \theta_0^2 u_2(t) + \theta_0^3 u_3(t) + O(\theta_0^4)$$

Pour $\theta_0 \sim 0$

$$\begin{cases} u_1(0) = 1 & u_2(0) = u_3(0) = 0 \\ u_1'(0) = 0 & u_2'(0) = u_3'(0) = 0 \end{cases}$$

En insérant θ dans l'équation linéaire et en utilisant un développement à l'ordre 3 :

$$\theta_0 \ddot u_1 + \theta_0^2 \ddot u_2 + \theta_0^3 \ddot u_3$$
$$+ \omega^2 \left[\theta_0 u_1 + \theta_0^2 u_2 + \theta_0^3 u_3 - \frac{1}{6} \theta_0^3 u_1^3 \right] = O(\theta_0^4)$$

Puis en identifiant chaque puissance :

$$\begin{cases} \ddot u_1 + \omega^2 u_1 = 0 \\ \ddot u_2 + \omega^2 u_2 = 0 \\ \ddot u_3 + \omega^2 u_3 = \frac{\omega^2}{6} u_1^3 \end{cases}$$

on obtient un système d'équations linéaires avec second membre.

$$u_1 = \cos(\omega t) \qquad u_2 = 0$$
$$\ddot u_3 + \omega^2 u_3 = \frac{\omega^2}{6} \cos^3(\omega t)$$

On trouve

$$u_3 = \frac{1}{32} \cos(\omega t) - \frac{1}{32} \cos(3\omega t) + \frac{3}{8} \omega t \sin(\omega t)$$

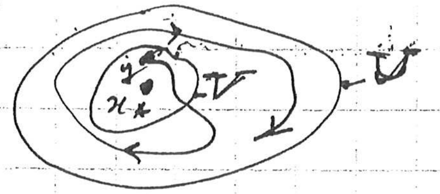
D'où

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t) + \frac{\theta_0^3}{32} \left(\cos(\omega t) - \cos(3\omega t) + 12 \omega t \sin \omega t \right)$$

$\theta(t)$ est périodique comme on l'a déjà, mais son développements en θ_0 donne des termes non périodiques comme $\frac{1}{8} \omega t \sin(\omega t)$ appelés, termes séculaires.

Nous nous intéressons maintenant au comportement des trajectoires autour des points d'équilibre : $f(x_*) = 0$.

53. Définition On dit qu'un point d'équilibre x_* est stable si pour tout voisinage U de x_*, il existe $V \subset U$ un



V voisinage de x_* plus petit tel que toute trajectoire $\{\phi^t(y)\}_{t\geqslant 0}$ issue de V, $y \in V$, reste indéfiniment dans U,

$$\forall y \in V, \quad \forall t \geqslant 0 \quad \phi^t(y) \in U$$

(en particulier, le temps de vie de y est positivement ∞).
Un point x_* non stable est dit (bien sûr) instable.

54. Définition Un point d'équilibre x_* est dit asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage U de x_* tel que

$$\forall y \in U \quad \lim_{t \to +\infty} \phi^t(y) = x_*$$

On commence par étudier le cas linéaire (*)

$$x' = Ax \qquad A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n$$

on notera $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ les v.p. de A de multiplicité $m_1 \ldots m_r$. On précise les définitions de stabilité.

(*) L'équation linéarisée en x_* est $\xi' = A\xi$ avec $A = Df(x_*)$

55. Définition On dit que x_* est hyperbolique si les parties réelles des valeurs propres de $Df(x_*)$ ne sont jamais nulles. Plus précisément

x_* est dit puits si $\forall i$ réel$(\lambda_i) < 0$
x_* est dit source si $\forall i$ réel$(\lambda_i) > 0$
x_* est dit selle s'il existe à la fois des

Un théorème important que nous allons montrer par étapes est le suivant.

56. Théorème Soit $x' = f(x)$ un S.D. x_* un point d'équilibre hyperbolique. Si x_* est un puits, il

est asymptotiquement stable, sinon il est instable.

Nous commençons par le cas des puits : réel$(\lambda) < 0$ pour toute v.p. λ de $A = Df(0)$. Et plus précisément par la stabilité de l'équation linéarisée : $x' = Ax$.

57. Lemme On suppose qu'il existe deux constantes $\alpha < \beta$ telles que, pour toute valeur propre de

$$\alpha < \text{réel}(\lambda) < \beta$$

Alors on peut trouver une matrice inversible P telle que, dans le nouveau produit scalaire

$$\langle x, x' \rangle_P = \langle P^{-1}x, P^{-1}x' \rangle$$

on ait

$$\alpha \langle x, x \rangle_P \leq \langle Ax, x \rangle_P \leq \beta \langle x, x \rangle_P$$

preuve On sait qu'on peut trouver un changement de base tel que, $P^{-1}AP = B$ s'exprime sous forme d'une matrice diagonale par bloc. Chaque bloc étant d'un des types suivant dit de Jordan :

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{si } \lambda \text{ est réel}$$

ou bien

$$B_i = \begin{bmatrix} \Lambda & I & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ 0 & & & \Lambda \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = a + ib$$

Le cas d'un bloc de dimension 1

$$\begin{cases} B = [\lambda] & \langle Bx, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \\ \alpha \langle x, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle \leq \beta \langle x, x \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} & \langle Bx, x \rangle = a \langle x, x \rangle \\ \alpha \langle x, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle \leq \beta \langle x, x \rangle \end{cases}$$

Le cas d'un bloc de Jordan : on modifie P par une matrice diagonale $(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{d-1})$ dans le cas réel :

$$B_\varepsilon := \begin{bmatrix} 1/\varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\varepsilon^{d-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \varepsilon & \\ 0 & & \varepsilon^{d-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Le fait d'avoir choisi une inégalité stricte dans $\alpha < \lambda < \beta$

$$\alpha \|x\|^2 \leqslant \langle B_\varepsilon x, x \rangle \leqslant \beta \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Dans le cas complexe conjugué on prend comme matrice diagonale, une matrice par bloc

$$\begin{bmatrix} I & & & 0 \\ & \varepsilon I & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^{d-1} I \end{bmatrix} \quad \text{avec } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(*) Voir 56

58 **Corollaire**(*) Un puit est asymptotiquement stable

preuve Par hypothèse réel$(\lambda) < -c$, $c > 0$, pour toute valeur propre de $Df(0) = A$. On peut trouver un produit scalaire $\langle x, x \rangle_P$ donné par 57 tel que

$$\langle Ax, x \rangle_P \leqslant -c \langle x, x \rangle_P$$

On introduit une fonction "niveau" dite de Liapunov

$$L(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle_P}$$

et on s'intéresse à $t \mapsto L(\phi^t(x))$

$$\frac{d}{dt} L(\phi^t(x)) = DL(\phi^t(x)) \cdot \frac{d}{dt} \phi^t(x)$$

$$= DL(\phi^t(x)) \cdot f(\phi^t(x))$$

$$= \frac{\langle \phi^t(x), f(\phi^t(x)) \rangle_P}{\sqrt{\langle \phi^t(x), \phi^t(x) \rangle_P}}$$

D'une part pour x proche de x_* (on suppose $x_* = 0$)

$$f(x) = Ax + o(x)$$

D'autre part d'après 57

$$\langle Ax, x\rangle_p \leq -c\langle x, x\rangle_p \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

D'où pour δ suffisamment petit, et $\langle x, x\rangle_p \leq \delta$

$$\langle f(x), x\rangle_p \leq -\frac{c}{2}\langle x, x\rangle_p$$

Le calcul sur la fonction de Lyapunov entraîne

$$(*) \quad \frac{d}{dt} L(\phi^t(x)) \leq -\frac{c}{2} L(\phi^t(x))$$

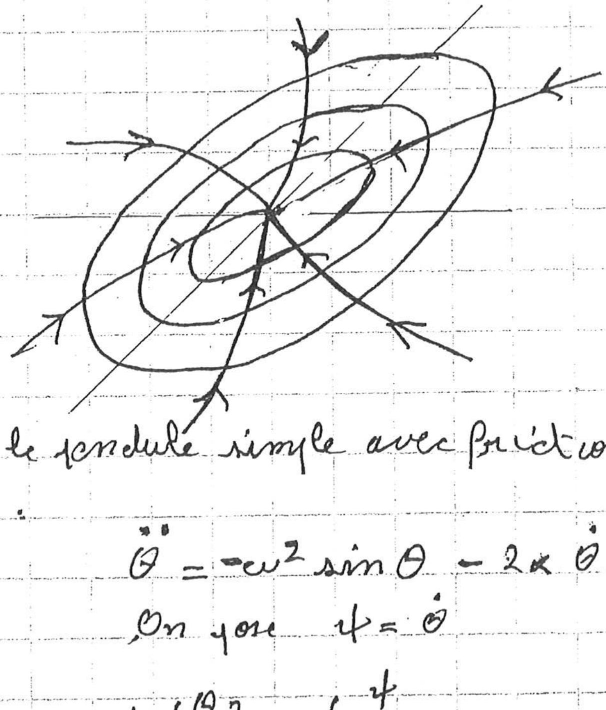
pour tout t tel que $\langle \phi^t(x), \phi^t(x)\rangle_p \leq \delta$.

En intégrant l'équation $(*)$ on a

$$L(\phi^t(x)) \leq L(x)\exp\left(-\frac{ct}{2}\right)$$

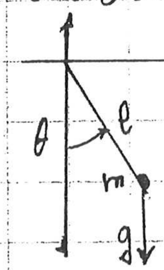
qui implique que $\phi^t(x)$ est défini en tout temps, vérifie $\langle \phi^t(x), \phi^t(x)\rangle_p \leq \delta$ et tend vers x_*. ∎

59 Remarque 1) On vient de construire des courbes de niveau d'une sphère "tordue" qui ont la propriété que le champ de vecteur est rentrant en tout point de ces courbes.



Le point clef de la preuve de 58 est l'existence d'une fonction $L(x)$, décroissant le long du flot.

2) Par exemple, le pendule simple avec friction présente un puit à l'origine.



$$\ddot\theta = -\omega^2 \sin\theta - 2\alpha\dot\theta, \qquad \alpha > 0$$

On pose $\psi = \dot\theta$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta\\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi\\ -\omega^2\sin\theta - 2\alpha\psi\end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}\right)$$

$x_* = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ est un point d'équilibre $\quad Df(0) = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta} & \frac{\partial f_1}{\partial\psi}\\ \frac{\partial f_2}{\partial\theta} & \frac{\partial f_2}{\partial\psi}\end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -2\alpha\end{bmatrix}$

Les valeurs propres sont solutions de

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2 = 0$$

oubien $\alpha^2 - \omega^2 > 0$ et $\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$

les 2 racines sont strictement négatives

oubien $\alpha^2 - \omega^2 = 0$ $\lambda = -\alpha$ est racine double

oubien $\alpha^2 - \omega^2 < 0$ et $\lambda = -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$

réel $(\lambda) = -\alpha < 0$.

3) On peut montrer (conf. deuxième de 56) que, réciproquement au corollaire 58, si x_* est un point stable alors $Re(\lambda) \leq 0$ pour toute valeur propre de $Df(x_*)$. Pour un point hyperbolique x_*, on a donc l'équivalence entre : stable, asymptotiquement stable, $Re(\lambda) < 0 \ \forall \lambda$.

60. Definition On note toujours $\dot{x} = f(x)$, $x \in U$, l'équation différentielle et on suppose toujours $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2. On note $\{\phi^t\}_t$ le flot de ce champ de vecteurs et x_* un point d'équilibre. On dit que $L : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1, est une fonction de Liapunov en x_* s'il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x_* tel que

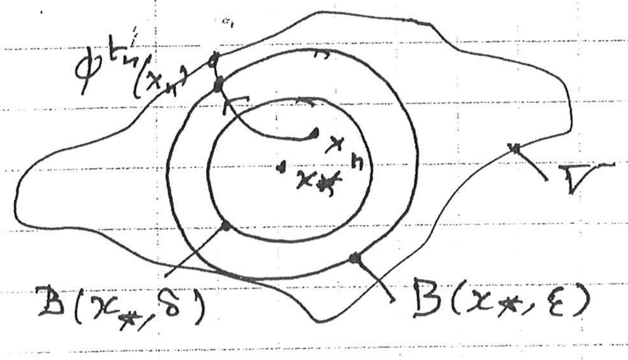
1) $\forall x \in V$, $t \mapsto L(\phi^t(x))$ est décroissant, ou de manière équivalente, $\forall x \in V$, $DL(x).f(x) \leq 0$.

2) $L(x_*) = 0$ et $\forall x \in V \setminus \{x_*\}$, $L(x) > 0$

61. Théorème Soit L une fonction de Liapunov en x_*.
a) Alors x_* est necessairement stable. b) Si de plus, $\exists V$ $\forall x \in V \setminus \{x_*\}$, $t \mapsto L(\phi^t(x))$ est strictement decroissante (impliqué par exemple par $DL(x).f(x) < 0 \ \forall x \in V \setminus \{x_*\}$), alors, x_* est asymptotiquement stable.

preuve a) Par l'absurde, il existe V voisinage ouvert de x_*, $\exists$ une suite de $x_n \to x_*$ de points de V, $\exists$ une suite de $t_n > 0$ tels que

$$\forall\, 0 \leq t < t_n,\ \phi^t(x_n) \in V,\quad \phi^{t_n}(x_n) \notin V$$



Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on note

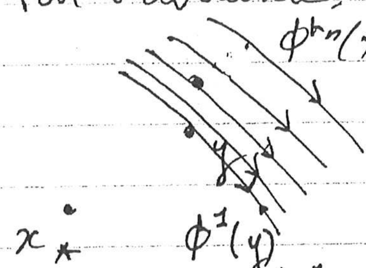
$$\begin{cases} M_\varepsilon = \sup\limits_{\|x - x_*\| \leq \varepsilon} L(x) \\ m_\varepsilon = \inf\limits_{\|x - x_*\| = \varepsilon} L(x) \end{cases}$$

Par continuité de L et du fait que L ne s'annule que en x_*, on obtient que, pour tout ε suffisamment petit, $m_\varepsilon > 0$ et il existe $\delta < \varepsilon$ tel que $M_\delta < m_\varepsilon$. Soit $\|x_n - x_*\| < \delta$. Il existe $s_n \in]0, t_n[$ tel que $\|\phi^{s_n}(x_n) - x_*\| = \varepsilon$ (la trajectoire issue de x_n sort de V, donc sort de $B(x_*, \varepsilon)$). On obtient alors la contradiction suivante

$$\begin{cases} L(\phi^{s_n}(x_n)) \leq L(x_n) \leq \delta \\ L(\phi^{s_n}(x_n)) \geq \varepsilon \end{cases}$$

b) Par l'absurde, il existe $x_0 \in \bar{B}(x_*, \varepsilon) \subset V$ dont l'orbite ne converge pas vers x_*. Par compacité de $\bar{B}(x_*, \varepsilon)$, on peut trouver $t_n \nearrow +\infty$ tel que

$$\phi^{t_n}(x_0) \to y$$



D'une part $L(\phi^1(y)) < L(y)$ par hypothèse. D'autre part quitte à prendre une sous suite de t_n, on peut supposer $t_{n+1} - t_n > 1$ et alors

$$L(\phi^{t_{n+1}}(x_0)) = L(\phi^{t_{n+1} - t_n} \phi^{t_n}(x_0)) \leq L(\phi^1 \phi^{t_n}(x_0))$$

Puis en passant à la limite en n, $L(y) \leq L(\phi^1(y))$: d'où la contradiction.

62. Exemple. On considère le flot de

$$\begin{cases} \dot{x} = -y\,(1-2z) \\ \dot{y} = x\,(1+z) \\ \dot{z} = -xy \end{cases} \qquad X_* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ un pt d'équilibre.}$$

le système linéarisé est $\dot{X} = AX$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
de valeurs propres $\pm i$ et 0. On est dans le cas où on ne peut pas utiliser le th 56. On cherche une fonction de Liapunov sous la forme

$$L(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

$$\frac{1}{2} DL(X).f(X) = -ax\,y(1-2z) + by\,x(1+z) - c\,xyz$$

Pour que $DL(X).f(X) \leq 0$, on peut choisir a,b,c de sorte que

$$(-a+b)\,xy + (2a+b-c)\,xyz \leq 0$$

avec $a = b = \frac{1}{3}c$. D'où

$$L(X) = 3x^2 + 3y^2 + z^2$$

$L(X)$ est bien de Liapunov ($L^{-1}(0) = \{0\}$ et $DL(X).f(X) \leq$
Le point $X_* = 0$ est donc stable. Mais comme les courbes de niveau $L^{-1}(c)$ sont des ellipsoïdes invariants par le flot, le point O n'est pas asymptotiquement stable.

63. Exemple On appelle flot gradient, le flot donné par

$$x' = -\nabla V(x), \qquad V \text{ de classe } C^2$$

($\nabla V(x)$ désigne le gradient) On suppose que x_* est un minimum local isolé de V : dans un voisinage $\mathcal{U}$ de x_* on a :

$$\begin{cases} V(x) > V(x_*), & \forall x \in \mathcal{U},\ x \neq x_* \\ \nabla V(x_*) = 0 & \\ \nabla V(x) \neq 0, & \forall x \in \mathcal{U},\ x \neq x_* \end{cases}$$

Alors x_* est un point d'équilibre asymptotiquement stable : $V x \mapsto V(x)$ est une fonction de Liapunov stricte, $DV(x).(-\nabla V(x)) = -\|\nabla V(x)\|^2$.

64. <u>Exemple Lienard</u> On considère une classe d'equations dite de Lienard :

$$\begin{cases} x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \\ x\,g(x) > 0, \quad f(x) > 0, \quad \forall x \neq 0 \end{cases}$$

(Le dernier terme $g(x)$ peut être vu comme une force de rappel, le terme $f(x)$ est vu comme une force de frottement). On fait aussi l'hypothèse

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$$

Ce type de famille englobe par exemple

$$\begin{cases} x'' + (ax^2 + b)x' + \omega^2 x = 0 \\ a > 0 \text{ et } b \geq 0 \end{cases}$$

On montre que l'origine est un point d'equilibre asymptotiquement stable.* On introduit une variable $y = x'$

(* global)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -g(x) - y\,f(x) \end{cases}$$

L'hypothese $x\,g(x) > 0$ montre que $g(0) = 0$. Donc $X_* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un point d'equilibre. L'equation linéarisée donne $X' = AX$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -f(0) \end{bmatrix}$$

Si $f(0) > 0$, on sait déjà que 0 est asymptotiquement stable localement. Si $f(0) = 0$ on ne peut plus rien dire même localement.

On introduit la fonction

$$L(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)\,ds.$$

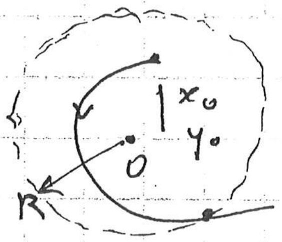
La derivée le long du flot de L donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(x(t), y(t)) &= y'y + x'g(x) \\ &= (-g(x) - y\,f(x))y + y\,g(x) \\ &= -y^2 f(x) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

L n'est <u>cependant</u> pas une fonction de Liapunov.

Par hypothèse la fonction L est coercive :
$$L(x,y) \to +\infty \quad \text{dès que} \quad \|x\|^2+\|y\|^2 \to +\infty.$$
Ce qui montre que toute solution est définie pour tout $t \geq 0$ et reste bornée :

en effet par l'absurde : supposons que pour un (x_0,y_0) la solution ne reste pas bornée (contient le cas où le temps de vie est fini). Alors il existe $R>0$ tel que
$$\min_{\|x,y\|\geq R} L(x,y) \geq L(x_0,y_0)+1$$



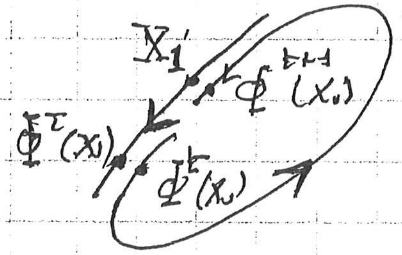
Il existe un instant $t>0$ tel que $\|x(t),y(t)\| = R$

D'une part, par décroissance de L
$$L(x(t),y(t)) \leq L(x_0,y_0)$$
D'autre part $L(x(t),y(t)) \geq L(x_0,y_0)+1$: contradiction

On introduit maintenant l'ensemble
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : y=0 \text{ ou } x=0 \right\}.$$
On montre que l'orbite (positive) de tous points $X_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ converge vers S :

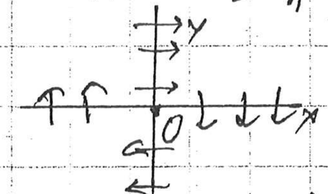
en effet par l'absurde : Soit $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ une valeur d'adhérence de $\{\Phi^t(X_0)\}_{t\geq 0}$ (l'orbite est bornée)

D'une part $t \mapsto L \circ \Phi^t(X_1)$



et pour $\tau>0$ fixé on a
$$L(\Phi^\tau(X_1)) \leq L(X_1)$$
D'autre part, il existe $t_n>0$, $s_n>0$ tels que
$$\Phi^{t_n}(X_0) \to \Phi^\tau(X_1)$$
$$\Phi^{t_n+s_n}(X_0) \to X_1$$
Comme $L(\Phi^{t_n+s_n}(X_0)) \leq L(\Phi^{t_n}(X_0))$, par continuité de L on a
$$L(X_1) \leq L(\Phi^\tau(X_1))$$
D'où $L(X_1) = L\circ\Phi^\tau(X_1)$, $\forall \tau \geq 0$. En dérivant$/\tau$
$$DL(X_1)\cdot f(X_1) = -y_1^2 f(x_1) = 0$$

Le point X_1 appartient donc à S. Mais si X_1 est un point d'accumulation de $\{\Phi^t(X_0)\}_{t>0}$, $\Phi^\tau(X_1)$, $\tau>0$, est aussi point d'accumulation de $\{\Phi^t(X_0)\}_{t>0}$.



Vu la forme du champ de vecteurs sur $S\setminus\{0\}$, le seul ensemble invariant de S est $\{0\}$: $\Phi^t(X_0) \to 0$; X_0 est asymptotiquement stable

On termine cette section en décrivant le comportement local autour d'un point hyperbolique selle.

65. <u>Théorème de la variété stable</u> on considère le flot associé à $x' = f(x)$, de classe C^1, et on suppose que $f(0)=0$ est un point d'équilibre hyperbolique de type selle ($\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ pour tout λ v.p. de $A = Df(0)$; 0 est ni un puits ni une source)

1) On peut décomposer $\mathbb{R}^n$ en somme $\mathbb{R}^n = E_u \oplus E_s$ de s.e.v. invariant par A :

$AE_u = E_u$, $AE_s = E_s$

les v.p. de A restreint à E^u sont de partie réelle strictement positive et celles sur E^s de partie réelle strictement négative.

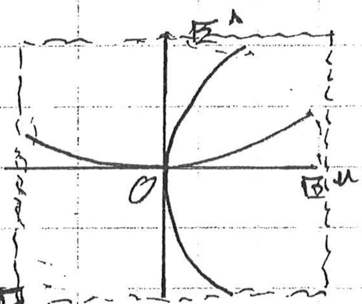
Si $\mathrm{Re}(\lambda) < \lambda_s < 0$, $\forall \lambda$ v.p. de $(A|E^s)$

$\mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_u > 0$, $\forall \lambda$ v.p. de $(A|E^u)$

alors, pour 2 constantes C_u, C_s.

$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in E^u \quad \|e^{tA}x\| \geq C_u e^{t\lambda_u}$

$\forall t \in \mathbb{R} \ \forall x \in E^s \quad \|e^{tA}x\| \leq C_s e^{t\lambda_s}$



$B = B_u \times B_s$

2) Il existe dans un voisinage de 0 deux graphes

$W^u_{loc} = \{(x, \varphi_u(x)) ; x \in E^u \cap {}_u\}$

$W^s_{loc} = \{(\varphi_s(y), y) ; y \in E^s \cap B_s\}$

invariant par $\{\Phi^{-t}\}_{t>0}$ et $\{\Phi^t\}_{t>0}$ respectivement

$$\begin{cases} \Phi^t(W^s_{loc}) \subset W^s_{loc}, \quad \forall t \geq 0 \\ \forall\, x \in W^s_{loc} \quad \| \Phi^t(x) \| \leq C_s\, e^{t\lambda_s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi^{-t}(W^u_{loc}) \subset W^u_{loc} \\ \forall\, x \in W^u_{loc} \quad \| \Phi^{-t}(x) \| \leq C_u^{-1}\, e^{-t\lambda_u} \end{cases}$$