Département Licence

Année 2004–2005 — 10 Janvier 2005
SVTE — SVT101
Mathématiques — Durée : 1h30
Ph. Thieullen

Aucun document n'est autorisé. Toute réponse non justifiée est considérée comme fausse. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 1.$$

(1) Déterminer la solution générale de (E).
(2) Trouver la solution y de (E) vérifiant $y(-1) = 0$ et $y'(-1) = 0$.

Exercice 2. On considère une variable aléatoire X numérique de densité $f(x)$ donnée par

$$\begin{cases} f(x) = k(3+x) & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ f(x) = k(3-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \qquad f(x) = 0, \quad \text{si } x < -3 \text{ ou } x > 3.$$

(1) Tracer l'allure du graphe de f. Déterminer la valeur de k pour que f soit bien la densité d'une variable aléatoire.
(2) Déterminer la fonction de répartition et tracer l'allure de son graphe.
(3) Déterminer la probabilité que X dépasse la valeur $x_0 = 2$.

Exercice 3. Une entreprise informatique fabrique des CD-Rom. Sur 100 CD-Rom fabriqués, 30 possèdent un défaut de fabrication. Pour éliminer les pièces défaillantes, l'entreprise utilise un appareil automatique de contrôle de qualité. Cet appareil peut se tromper sur la qualité du produit. Lors du contrôle, un CD-Rom défectueux est éliminé 9 fois sur 10, un CD-Rom en état de marche est accepté 8 fois sur 10. On notera les événements :

D = « le CD-Rom est défectueux »,
E = « le CD-Rom est éliminé lors du contrôle ».

(1) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(D \text{ et } E)$, $\mathbb{P}(D \text{ et } \bar{E})$.
(2) Calculer la probabilité qu'un CD-Rom soit éliminé lors du contrôle.

(3) L'appareil de contrôle élimine un CD-Rom. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?

Exercice 4. Un conseil composé d'un président et de 6 membres est amené à se prononcer par oui ou par non sur une motion présentée par le président. Les 7 personnes votent, le président vote oui et la décision est prise à la majorité des voix. Aucun des 6 membres n'est vraiment enthousiaste, chacun a 4 chances sur 10 de voter oui et les 6 membres votent de manière indépendante. Calculer la probabilité que la motion soit acceptée.

Exercice 5. Un automobiliste se rend à son travail 225 jours par an. Il a 2 options. Dans la première option, il achète un abonnement d'une place de parking à l'année pour un prix de S euros. Dans la seconde, il décide de stationner chaque fois sur un emplacement interdit et risque alors une amende de 10 euros par jour s'il est verbalisé. On ne peut être verbalisé qu'au plus une fois par jour. La probabilité d'être verbalisé est de 20% chaque jour. On appelle X le nombre de fois que l'automobiliste est verbalisé au cours d'une année de travail dans le cas où il choisit la deuxième option.

(1) Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

(2) On appelle Y le total des amendes d'une année dans le cas de la deuxième option. Exprimer Y en fonction de X. Calculer $\mu = \mathbb{E}(Y)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y)$.

On admettra qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale $N(\mu, \sigma)$.

(3) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(450 < Y < 458)$.

(4) Si l'automobiliste choisit la deuxième option, on dira qu'il est «gagnant» si, avec une probabilité d'au moins 0.75, le total des amendes est inférieur à S. On suppose ici que $S = 500$ euros. Est-il gagnant ?

(5) (Hors barême) Le gérant du parking cherche à attirer cet automobiliste en lui proposant un abonnement promotionnel S de sorte que, s'il choisissait la deuxième option, il obtiendrait $Y > S$ avec une probabilité au moins égale à 0.75. Calculer le prix S de l'abonnement.

Barême : exo1=**4**, exo2=**6**, exo3=**5**, exo4=**3**, exo5=**6**+(**2** hors barême)

Corrigé de l'examen de janvier 2005

Exercice 1.

(1) On commende par déterminer la solution générale de l'équation homogène (H). L'équation carastéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ et admet pour solution $r = 1$ avec multiplicité 2. La solution générale de (H) est donc

$$y_H(x) = (\lambda + \mu x)e^x.$$

On recherche maintenant une solution particuli'ere de léquation non homogène (E). Comme le second membre est de la forme $f(x) = 1 = e^{0*x}$ et que 0 n'est pas solution de l'équation carastéristique on cherche une solution particulière $y_P(x)$ sous la forme $y_P(x) = const$. On trouve $y_P(x) = 1$, d'où la solution générale de (E)

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = (\lambda + \mu x)e^x + 1.$$

(2) On cherche λ et μ tels que $y(-1) = y'(-1) = 0$. On détermine d'abord $y'(x) = (\lambda + \mu + \mu x)e^x$. Puis on résoud le système

$$y(-1) = (\lambda - \mu)e^{-1} + 1 = 0, \qquad y'(-1) = \lambda e^{-1} = 0.$$

On trouve alors $\lambda = 0$ et $\mu = e$. D'où la solution de (E) vérifiant les conditions initiales demandées :

$$y(x) = 1 + xe^{x+1}.$$

Exercice 2.

(1) Sur chacun des intervalles $]-\infty, -3[$, $[-3, 0]$, $[0, 3]$ et $[3, \infty[$, le graphe de $f(x)$ est une droite. Il suffit donc de tracer les points $(x, y = f(x))$ en chaque extrémité de ces intervalles. On trouve

La fonction $f(x)$ est la densité d'une v.a. si $f(x) \geq 0$ et si $\int f(x)\,dx = 1$. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 9k = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{1}{9}.$$

Pour le calcul de l'intégrale, on remarque que $\int f(x)\,dx$ représente l'aire du domaine situé sous la courbe. C'est l'aire d'un triangle qu'on peut calculer en utilisant la formule classique $aire = \frac{1}{2}\ base \times hauteur$.

(2) Par définition, la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du.$$

Il faut distinger 4 cas :
– si $x < -3$, $f(x) = 0$ pour $u \in]-\infty, x]$ et donc $F(x) = 0$,
– si $x > 3$, $F(x) = \int_{-3}^{3} f(u)\, du = 1$,
– si $x \in [-3, 0]$, $F(x) = \int_{-3}^{x} f(u)\, du$

$$F(x) = \frac{1}{2}\ base \times hauteur = \frac{1}{2}(x+3)f(x) = \frac{1}{18}(x+3)^2,$$

– si $x \in [0, 3]$, $F(x) = \int_{-3}^{0} f(u)\, du + \int_{0}^{x} f(u)\, du$

$$\begin{aligned} \int_0^x f(u)\, du &= \frac{1}{2}\ base \times (bord\ gauche + bord\ droit) \\ &= \frac{1}{2}x(\frac{1}{3} + \frac{3-x}{9}) = \frac{1}{18}x(6-x) \\ F(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{18}x(6-x). \end{aligned}$$

Le graphe a donc l'allure suivante (il est composé de deux morceaux de paraboles)

(3) On demande de calculer $\mathbb{P}(X > 2)$

$$\mathbb{P}(X > 2) = \frac{1}{2}(3-2)f(2) = \frac{1}{18} = 5.6\%.$$

Exercice 3. A chaque CD-Rom on peut associer deux informations : le CD-Rom est défectueux ou non, le CD-Rom est éliminé ou non. L'ensemble fondamental est donc constitué de tous les CD-Rom qu'on peut ranger de deux manières différentes : dans D ou son complémentaire $\bar{D}$, dans E ou son complémentaire $\bar{E}$. D'où

$$\Omega = \{DE,\ D\bar{E},\ \bar{D}E,\ \bar{D}\bar{E}\}.$$

Les CD-Rom défectueux, qu'ils soient éliminés ou non, sont rassemblés dans $D = \{DE,\ D\bar{E}\}$. L'énoncé donne les informations suivantes :

$$\mathbb{P}(D) = 30\%, \quad \mathbb{P}(E|D) = 90\%, \quad \mathbb{P}(\bar{E}|\bar{D}) = 80\%.$$

(1)

$$\mathbb{P}(DE) = \mathbb{P}(E|D)\mathbb{P}(D) = 90\% * 30\% = 27\%,$$
$$\mathbb{P}(\bar{D}\bar{E}) = \mathbb{P}(\bar{E}|\bar{D})\mathbb{P}(\bar{D}) = 80\% * 70\% = 56\%,$$
$$\mathbb{P}(D\bar{E}) = \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(DE) = 30\% - 27\% = 3\%.$$

On peut résumer ces calculs dans un tableau des événements simultanés :

Ω	E	$\bar{E}$	
D	27%	3%	30%
$\bar{D}$	14%	56%	70%
	41%	49%	100%

(2) La probabilité qu'un CD-Rom soit élimié est donné par

$$\mathbb{P}(E) = 41\%.$$

(3) Si un CD-Rom est éliminé, la probabilité qu'il soit déffectueux est donné par

$$\mathbb{P}(D|E) = \frac{\mathbb{P}(DE)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{27}{41} = 66\%.$$

Exercice 4. La motion est acceptée s'il y a au moins 3 personnes parmi les 6 membres à avoir voté « oui ». Si à chacun des membres, $i = 1, 2 \cdots, 6$, on associe une v.a. de Bernoulli X_i, valant 1 lorsque la personne vote « oui » et 0 sinon, le nombre total de personnes membres votant « oui » est donc égal à $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_6$. La variable X suit une loi de binomiale de paramètre $n = 6$, $p = 0.4$. On demande de calculer $\mathbb{P}(X \geq 3)$, on a :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X=0) & = (0.6)^6 = 4.7 \\ \mathbb{P}(X=1) & = 6 * (0.4) * (0.6)^5 = 18.7 \\ \mathbb{P}(X=2) & = 15 * (0.4)^2 * (0.6)^4 = 31.1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{P}(X \leq 2) & = 54.4 \\ \mathbb{P}(X \geq 3) & = 45.6 \end{cases}$$

Exercice 5.

(1) On suppose que l'automobiliste choisit la deuxième option. Pour chaque jour de travail on définit une variable de Bernoulli X_i valant 1 si l'automobiliste est verbalisé, et 0 sinon. Par hypothèse, la probabilité d'être verbalisé est de 20%. Le nombre total de fois que l'automobiliste est verbalisé est donc égal à

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{225}.$$

X suit une loi binomiale $B(n,p)$ de paramètre $n = 225$ et $p = 0.2$. On sait alors calculer

$$\mathbb{E}(X) = np = 45, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 36.$$

(2) Le total des amendes est égal à $Y = 10X$. Alors

$$\mu = \mathbb{E}(Y) = 450, \quad \mathrm{Var}(Y) = 3600, \quad \sigma = 60.$$

(3) On suppose maintenant que Y suit la loi normale $N(\mu, \sigma)$. On introduit la variable centrée réduite correspondante $Z = (Y - \mu)/\sigma$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(450 < Y < 458) &= \mathbb{P}(0 < Z < \frac{458 - 450}{60}) = \mathbb{P}(0 < Z < \frac{8}{60}) \\ &= F(0.13) - F(0) = 0.5517 - 0.5 \simeq 5\% \end{aligned}$$

(4) On suppose ici que $S = 500$. L'automobiliste est gagnant si $\mathbb{P}(Y < S) \geq 75\%$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y < S) &= \mathbb{P}(Z < \frac{S - \mu}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z < \frac{50}{60}) \\ &= \mathbb{P}(Z < 0.83) = 0.7967 \simeq 80\%. \end{aligned}$$

L'automobiliste est donc gagnant.

(5) On cherche maintenant S pour que $\mathbb{P}(Y > S) \geq 75\%$. On se ramène encore à la variable centrée réduite Z :

$$25\% = \mathbb{P}(Y < S) = \mathbb{P}(Z < \frac{S - \mu}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z < z_0)$$

où on a posé $z_0 = (S - \mu)/\sigma$. On remarque d'abord que z_0 est nécessairement négatif ($25\% < 50\%$). La table ne donne cependant que la probabilité de dépassement de la variable symétrique $|Z|$. On transforme donc le calcul précédent

$$\mathbb{P}(Z > -z_0) = 0.25, \quad \mathbb{P}(|Z| > -z_0) = 0.5, \quad z_0 = -0.674.$$

D'où une offre promotionnelle $S = 450 - 0.674 * 60 > 409$.