Corrigé de l'examen de janvier 2006

Exercice 1.

1. L'équation caractéristique est donnée par $r^2 - 2r + 2 = 0$ et admet pour racines, $r = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$. La solution générale de léquation homogène est donc
$$y(x) = e^x(A\cos x + B\sin x).$$
2. Comme le second membre s'écrit sous la forme $P(x)e^{kx}$ où $P(x)$ désigne un polynôme et $k = 1$ un scalaire différent de $1 \pm i$, on est en droit de rechercher une solution particulière $y_P(x)$ sous la forme $y_P(x) = (ax+b)e^x$. On trouve après calcul $y_P''(x) - 2y_P'(x) + 2y_P(x) = (ax+b)e^x$ et après identification au second membre donné xe^x, $a = 1$ et $b = 0$, soit la solution particulière $y_P(x) = xe^x$ et la solution générale de l'équation complète (E),
$$y(x) = xe^x + e^x(A\cos x + B\sin x).$$
3. On cherche A et B pour que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. On trouve d'abord
$$y'(x) = (x+1)e^x + e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x).$$
Les deux conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ amènnent à un système de deux équations $y(0) = A = 1$ et $y'(0) = 1 = 1 + (A+B)$, d'où $A = 1$ et $B = -1$, soit
$$y(x) = xe^x + e^x(\cos x - \sin x).$$

Exercice 2.

1. On constate d'abord que la fonction $f(x)$ est bien positive ou nulle. Il reste à montrer que son intégrale est égale à 1.
$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{2\pi} kx(1-\cos x)\,dx = k\Big\{[x(x-\sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(x-\sin x)\,dx\Big\} \\ &= k\Big\{(2\pi)^2 - [\frac{1}{2}x^2 + \cos x)_0^{2\pi}\Big\} = k\Big\{(2\pi)^2 - \frac{1}{2}(2\pi)^2\Big\} = 2\pi^2. \end{aligned}$$
D'où $k = \frac{1}{2\pi^2}$.
2. Par définition d'une densité, on obtient
$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{X}\Big] = \int_0^{2\pi}\frac{1}{x}\frac{1}{2\pi^2}x(1-\cos x)\,dx = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}(1-\cos x)\,dx.$$
D'où $\mathbb{E}[1/X] = \frac{1}{\pi}$.

Exercice 3. On peut décrire l'espace de probabilité aussi bien en termes d'événements élémentaires qu'à l'aide de variables aléatoires pourvu quelles soient en nombre suffisant. On introduit ainsi la variable «mère»prenant deux valeurs possibles BB et Bb et la variable «enfant»prenant les valeurs BB, Bb et bb. La variable «père»n'est pas introduite car elle est constante égale à Bb.

1. La loi de la variable «mère»est donnée par l'énoncé, soit $\mathbb{P}(\text{mère} = BB) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(\text{mère} = Bb) = \frac{2}{3}$.