Corrigé de l'examen de juin 2005

Exercice 1.

(1) L'équation caractéristique est donnée par $r^2 - r - 6 = 0$ de racines $r = -2$ et $r = 3$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x},$$

où A et B sont des constantes arbitraires.

(2) Le second membre $f(x)$ peut s'écrire comme la somme de deux seconds membres $f_1(x) = 6$ et $f_2(x) = (2 + 10x)e^{3x}$. Si $y_{P1}(x)$ est une solution particulière de l'équation non homogène avec second membre $f_1(x)$ et si $y_{P2}(x)$ est une solution correspondant à $f_2(x)$, le théorème de superposition nous permet d'affirmer que $y_{P1}(x) + y_{P2}(x)$ est une solution particulière de (E).

(3) Pour $f_1(x)$ on trouve par exemple $y_{P1}(x) = -1$. Pour $f_2(x)$, comme l'exponent 3 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_{P2}(x) = x(a + bx)e^{3x}.$$

En dérivant deux fois, on trouve :

$$y''_{P2}(x) - y'_{P2}(x) - 6y_{P2}(x) = \Big((2b + 5a) + 10bx\Big)e^{3x} = (2 + 10x)e^{3x}.$$

(Bien entendu, le coefficient en x^2e^{3x} doit disparaître). Après identification, on trouve $a = 0$ et $b = 1$, soit $y_{P2}(x) = x^2e^{3x}$ et la solution générale de (E) :

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x} + x^2e^{3x} - 1.$$

(4) La solution a pour dérivée :

$$y'(x) = -2Ae^{-2x} + 3Be^{3x} + (2x + 3x^2)e^{3x}.$$

En évaluant $y(x)$ et $y'(x)$ en $x = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} A + B &= 1 \\ -2A + 3B &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A &= 3/5 \\ B &= 2/5 \end{cases}$$

d'où la solution au problème initial :

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{-2x} + \Big(\frac{2}{5} + x^2\Big)e^{3x} - 1.$$

Exercice 2.

(1) Sans aucune autre information supplémentaire, un lot a une chance sur douze d'être produit un mois donné. d'où

$$\mathbb{P}(\text{"le lot provient des 3 premiers mois"}) = 3/12 = 0.25.$$

(2) Chaque montre peut être considérée comme une v.a. à laquelle on associe deux informations : (1) elle appartient à un lot produit au cours des 3 premiers mois, ou son contraire ; (2) elle est défectueuse, ou son contraire. L'énoncé permet de construire un arbre de probabilités en commençant par calculer la probabilité des deux éventualités de l'information (1) puis celle des deux éventualités de l'information (2) sachant celle de (1). On obtient ainsi le tableau :

	non défectueuse	**défectueuse**
lot des 3 premiers mois	$(3/12) * 60\%$	$(3/12) * 40\%$
lot des 9 derniers mois	$(9/12) * 90\%$	$(9/12) * 10\%$

Ce tableau permet de calculer d'abord la probabilité qu'une montre soit défectueuse, quelle provienne des 3 premiers mois ou des 9 derniers :

$$\mathbb{P}(\text{“défectueuse”}) = (3/12) * 40\% + (9/12) * 10\% = 21/120.$$

Il permet ensuite de calculer la probabilité conditionnelle

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{“lot des 3 premiers mois”} \mid \text{“défectueuse”})\\ &\qquad = \frac{(3/12) * 40\%}{21/120} = \frac{12}{21} = 0.57.\end{aligned}$$

Exercice 3. En tirant au hasard 7 personnes, ces personnes deviennent des v.a. indépendantes pouvant prendre 3 valeurs : “asiatique”, “blanc” et “noir” avec les probabilités 60%, 39% et 1%.

(1) Si on ne s'intéresse qu'au seul fait d'être ou de pas être asiatique, les 7 personnes précédentes peuvent être considérées comme des variables de Bernoulli prenant les 2 valeurs 1 ou 0, soit“asiatique” ou “non asiatique”, avec les probabilités 60% et 40%. La somme S de ces v.a. suit une loi binomiale $N(n = 7, p = 60\%)$. La probabilité $\mathbb{P}$ qu'il y ait une majorité d'asiatique est donc égale à

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \mathbb{P}(S = 4) + \mathbb{P}(S = 5) + \mathbb{P}(S = 6) + \mathbb{P}(S = 7)\\ &= \binom{7}{4}(60\%)^4(40\%)^3 + \binom{7}{5}(60\%)^5(40\%)^2\\ &+ \binom{7}{6}(60\%)^6(40\%) + \binom{7}{7}(60\%)^7\\ &= 71\%.\end{aligned}$$

On a utilisé $\binom{7}{4} = 35$, $\binom{7}{5} = 21$ et $\binom{7}{1} = 7$.

(2) De même, si on ne s'intéresse qu'au seul fait d'être “noir” ou “non noir” avec les probabilités 1% ou 99%, la probabilité $\mathbb{P}$ de n'obtenir aucun noir dans l'échantillon est donc

$$\mathbb{P} = (99\%)^7 = 93\%.$$

Exercice 4.

(1) Appelons X le salaire d'un représentant de commerce. Par hypothèse X suit une loi normale $N(\mu = 400, \sigma = 50)$. En appelant N une loi normale standard, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 422) &= \mathbb{P}(\frac{X - 400}{50} > \frac{422 - 400}{50}) \\ &= \mathbb{P}(N > 0.44) = 1 - \mathbb{P}(N < 0.44) = 1 - 0.67 = 33\%.\end{aligned}$$

(2) Le fait d'être ou de ne pas être une bonne journée est une variable de Bernoulli. Chaque journée est indépendante des autres. La v.a. Y est donc la somme de 5 v.a. de Bernoulli indépendantes ; Y suit une loi binomiale $B(n = 5, p = 33\%)$. D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) \\ &= 10(33\%)^3(67\%)^2 + 5(33\%)^4(67\%) + (33\%)^5 = 20\%.\end{aligned}$$

(3) Par hypothèse W est la somme de 275 v.a. de Bernoulli indépendantes.

(a) W suit une loi binomiale $B(n = 275, p = 33\%)$. Son espérance est donc égale à

$$\mu = \mathbb{E}(W) = np = 275(33\%) = 90 \quad \text{bonnes journées.}$$

Son écart-type est donnée par

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathrm{Var}(X)^{1/2} = (np(1 - p))^{1/2} \\ &= (275(33\%)(67\%))^{1/2} = 8 \quad \text{bonnes journées.}\end{aligned}$$

(b) Le théorème central limite permet d'approcher $(W - \mu)/\sigma$ par la loi normale $N(\mu, \sigma)$.

(c) En appelant N une v.a. de loi normale standard, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(75 < W < 100) &= \mathbb{P}(\frac{75 - 90}{8} < \frac{W - \mu}{\sigma} < \frac{100 - 90}{8}) \\ &= \mathbb{P}(-1.87 < N < 1.25) \\ &= \mathbb{P}(N < 1.25) - \big(1 - \mathbb{P}(N < 1.87)\big) \\ &= 0.8944 - (1 - 0.9693) = 86\%.\end{aligned}$$

Exercice 5. On appellera par la suite R, D et B les variables aléatoires "recette", "dépense" et "bénéfice". Ces variables dépendent en effet du carnet de commande de l'entreprise et sont donc bien des v.a.

(1) Dans les cas où il n'est pas demandé d'heures supplémentaires aux ouvriers, les dépenses moyennes de l'entreprise sont constantes :

$$\mathbb{E}(D) = D = 5 * 40 * 20 = 4000 \quad \text{euros.}$$

Les recettes sont par contre variables et se calculent à partir du tableau de statistique : on constatera que l'entreprise est limitée à $200 = 5 * 40$ heures de travail, peu importe l'offre du marché. On trouve

$$\mathbb{E}(R) = (3\% * 180 + 9\% * 190 + 88\% * 200) * 30 = 5955 \quad \text{euros.}$$

D'où un bénéfice moyen : $\mathbb{E}(B) = 5955 - 4000 = 1955$ euros.

(2) On recommence le calcule précédent avec 6 ouvriers travaillant chacun 40 heures sans heures supplémentaires. Les dépenses sont encore constantes égales à

$$\mathbb{E}(D) = D = 6 * 40 * 20 = 4800 \quad \text{euros.}$$

L'entreprise est ici limitée à $6 * 40 = 240$ heures de travail. La moyenne des recettes est alors donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R) = (3\% * 180 + 9\% * 190 + 12\% * 200 + 15\% * 210 + 22\% * 220 \\ + 21\% * 230 + 18\% * 240) * 30 = 6537 \quad \text{euros.}\end{aligned}$$

D'où un bénéfice moyen : $\mathbb{E}(B) = 6537 - 4800 = 1737$ euros. Cette opération est moins rentable que dans le premier cas.

(3) Ici les dépenses ne sont pas constantes et dépendent du nombre d'heures supplémentaires. Le volume horaire maximum que l'entreprise peut accepter est de $200 + 4 * 5 = 220$ heures. On a pour les dépenses :

$$\mathbb{E}(D) = 200 * 20 + (15\% * 10 + 61\% * 20) * 25 = 4342 \quad \text{euros.}$$

Pour les recettes :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R) = (3\% * 180 + 9\% * 190 + 12\% * 200 \\ + 15\% * 210 + 61\% * 220) * 30 = 6366 \quad \text{euros.}\end{aligned}$$

D'où un bénéfice $\mathbb{E}(B) = 6366 - 4342 = 2023$ euros. Il est légèrement supérieure au premier cas.

(4) En remplaçant 4 heures par 6 heures, l'entreprise peut espérer 230 heures de travail. Pour les dépenses et recettes, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D) &= 200 * 20 \\ &\quad + (15\% * 10 + 22\% * 20 + 39\% * 30) * 25 = 4440 \quad \text{euros.} \\ \mathbb{E}(R) &= (3\%180 + 9\% * 190 + 12\% * 200 \\ &\quad + 15\% * 210 + 22\%220 + 39\%230) * 30 = 6483 \quad \text{euros.}\end{aligned}$$

D'où un bénéfice $\mathbb{E}(B) = 6483 - 4440 = 2043$ euros sensiblement égale au bénéfice de la question (3).