Corrigé de l'examen de juin 2006

Exercice 1.

1. La formule de dérivation composée donne
$$\frac{d}{dx}\sqrt{u(x)} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$
On a utilisé la formule de dérivation $\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$.
2. On cherche à reconnaître la fonction sous le signe somme comme une dérivée d'une autre fonction en s'inspirant de la première partie de l'exercice :
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{2}\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + c.$$
3. On vient de montrer qu'une primitive de $x^2/\sqrt{x^3+1}$ est donnée par $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}$. On obtient ainsi
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \Big[F(x)\Big]_0^1 = \frac{2}{3}\big[\sqrt{2}-1\big] \simeq 0.276.$$

Exercice 2.

1. L'équation homogène $y'' + 5y' + 6y = 0$ est linéaire d'ordre 2 ; elle admet pour équation caractéristique $r^2 + 5r + 6 = 0$ de racines $r = -3$ et $r = -2$. La solution générale de l'équation homogène est donc
$$y_H(t) = Ae^{-3t} + Be^{-2t},$$
où A et B sont des scalaires quelconques.
2. On commence par chercher une solution particulière ; comme le second membre est polynomial sans résonnance avec les racines $r = -3$ ou $r = -2$, on cherche a priori une solution sous la même forme, $y_P(t) = at^2 + bt + c$. On trouve
$$y_P''(t) + 5y_P'(t) + 6y_P(t) = 6at^2 + t(10a+6b) + 2a + 5b + 6c = t^2 + 3.$$
Cela nous amène à résoudre le système suivant
$$\left\{\begin{array}{lllllll} 6a & & & & & = & 1 \\ 10a & + & 6b & & & = & 0 \\ 2a & + & 6c & + & 5b & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} a & = & 1/6 \\ b & = & -5/18 \\ c & = & 73/108 \end{array}\right.$$
La solution générale de l'équation non-homogène est donc
$$y(t) = Ae^{-3t} + Be^{-2t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{5}{18}t + \frac{73}{108}.$$

Exercice 3. Comme dans tout problème de probabilité, l'étape la plus difficile consiste à formaliser, ou modéliser, la situation physique. L'ensemble des événements élémentaires (ou ensemble des résultats observables) peut se décrire de la manière suivante

$$\Omega = \{A,\ B,\ C,\ DR,\ DV\ \}$$

où A, B, C désignent un des jetons correspondant (sans présicer de quelle face il s'agit) qui vient d'être lancé et DR etDV désignent l'une des deux faces visibles du jetons D lorsqu'il retombe. Chaque jeton a autant de chance d'être lancé et pour le jeton D, le deux faces ont autant de chance d'apparaître : on mesure donc la probailité de chaque événement par

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(DR) = \mathbb{P}(DV) = \frac{1}{8}.$$

L'événement $E =$ «la face visible est rouge» peut s'écrire formellement $E = \{A,\ B,\ DR\}$. Il contient strictement l'événement $F =$ «les deux faces sont rouges» qui s'écrit $F = \{A,\ B\ \}$. On demande la probabilité d'avoir F lorsqu'on sait que E est vrai. On calcule alors

$$\mathbb{P}(F \mid E) = \frac{\mathbb{P}(A,\ B\ )}{\mathbb{P}(A,\ B,\ DR\ )} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{4}{5}.$$

Exercice 4. Dans cette première partie, on choisit un échantillon avec remise de la souris après chaque tirage.

1. Une première manière de raisonner est la suivante : on tire au hazard une souris avec probailité $p = 6/10$ de retirer une souris blanche et une probabilité $1 - p = 4/10$ de retirer une souris grise. Comme la souris retirée est remise dans le groupe après chaque tirage, les tirages successifs sont indépendants et X représentent le nombre de succés (ou tirage d'une souris blanche) dans un échantillon de 4 souris. La variable X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètre $n = 4$ et $p = 6/10$. Plus précisément, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, soit

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\mathbb{P}(X=k)$	0.0256	0.1536	0.3456	0.3456	0.1296

   Une autre manière de raisonner consiste à expliciter l'ensemble fondamentale Ω : Ω représente ici l'ensemble de tous les tirages possibles

$$\Omega = \{\cdots, (S_1, S_2, S_3, S_4), \cdots\}$$

   c'est-à-dire l'ensemble des 4-uplets possibles de souris. On obtient donc Card $\Omega = 10^4$. On appelle E_k, l'ensemble des 4-uplets ayant exactement

k souris blanches. Pour chaque tirage de souris blanche, on compte 6 choix possibles ; pour chaque tirage de souris grises, soit $n-k$ tirages, on compte 4 choix possibles. Dans l'ordre successif des 4 tirages, il y a $\binom{4}{k}$ combinaisons possibles de tirages de k souris blanches ; par exemple, pour $k=2$, on comptabilise $\binom{4}{2}=6$ choix, soit

$$\begin{aligned}&(B,B,G,G),\ (B,G,B,G),\ (B,G,G,B),\\&(G,B,B,G),\ (G,B,G,B),\ (G,G,B,B).\end{aligned}$$

On calcule ainsi le cardinal de E_k, soit Card $E_k = \binom{4}{k}6^k4^{n-k}$ et la loi de X, soit $\mathbb{P}(X=k) = \text{Card } E_k/\text{Card } \Omega = \binom{4}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

2. Comme pour toute loi binomiale, l'espérance est donnée par $\mathbb{E}[X] = np = 2.4$ et l'écart-ype par $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} \simeq 1$.
3. Dans le cas d'un tirage sans remise, on raisonne de la manière suivante. On commence par construire un arbre d'événements et de probabilités conditionnelles :

$$\begin{array}{cccccccc}
\to & B:\frac{6}{10} & \to & B:\frac{5}{9} & \to & B:\frac{4}{8} & \to & B:\frac{3}{7}\\
| & & | & & | & & \searrow & G:\frac{4}{7}\\
| & & | & & \searrow & G:\frac{4}{8} & \to & B:\frac{4}{7}\\
| & & | & & & & \searrow & G:\frac{3}{7}\\
| & & \searrow & G:\frac{4}{9} & \to & B:\frac{5}{8} & \to & B:\frac{4}{7}\\
| & & & & | & & \searrow & G:\frac{3}{7}\\
| & & & & \searrow & G:\frac{3}{8} & \to & B:\frac{5}{7}\\
| & & & & & & \searrow & G:\frac{2}{7}\\
\searrow & G:\frac{4}{10} & \to & B:\frac{6}{9} & \to & B:\frac{5}{8} & \to & B:\frac{4}{7}\\
 & & | & & | & & \searrow & G:\frac{3}{7}\\
 & & | & & \searrow & G:\frac{3}{8} & \to & B:\frac{5}{7}\\
 & & | & & & & \searrow & G:\frac{2}{7}\\
 & & \searrow & G:\frac{3}{9} & \to & B:\frac{6}{8} & \to & B:\frac{5}{7}\\
 & & & & | & & \searrow & G:\frac{2}{7}\\
 & & & & \searrow & G:\frac{2}{8} & \to & B:\frac{6}{7}\\
 & & & & & & \searrow & G:\frac{1}{7}
\end{array}$$

qu'on interprète comme suit. On note par exemple $BGBB$, l'événement consistant à retirer dans l'ordre une souris blanche, une souris grise et deux souris blanches. On calcule la probabilité d'un tel événement en utilisant la formule cumulative des lois conditionnelles : $\mathbb{P}(BGBB)$ est égale à la probabilité de tirer B au premier tirage, soit $\frac{6}{10}$, fois la probabilté de tirer G au second tirage connaissant le premier tirage, soit $\frac{4}{9}$ (car il reste alors 9 souris dont 5 blanches et 4 grises), fois la probabilté de tirer B connaissant les deux premiers tirages, soit $\frac{5}{8}$ (car il reste maintenant 8 souris dont 5 blanches et 3 grises), fois la probabilité de tirer B connaissant les trois premiers tirages, soit $\frac{4}{7}$ (car il reste enfin 7 souris dont 4 blanches et 3 grises). Finalement, on obtient

$$\mathbb{P}(BGBB) = \frac{6}{10} * \frac{4}{9} * \frac{5}{8} * \frac{4}{7}.$$

On constate aussi que l'ordre dans lequel on a réparti les couleurs des souris importe peu :

$$\mathbb{P}(GBBB) = \mathbb{P}(BGBB) = \mathbb{P}(BBGB) = \mathbb{P}(BBBG).$$

On obtient enfin la loi de la variable X. On appelle E_k, l'ensemble de tous les tirages dans lesquels apparaîssent k souris blanches. On trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_0) &= \mathbb{P}(\{GGGG\}) \\
&= \frac{4*3*2*1}{10*9*8*7} = \frac{1}{\binom{10}{4}} \\
\mathbb{P}(E_1) &= \mathbb{P}(\{BGGG,\ GBGG,\ GGBG,\ GGGB\}) \\
&= \binom{4}{1}\frac{6*4*3*2}{10*9*8*7} = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{3}}{\binom{10}{4}} \\
\mathbb{P}(E_2) &= \binom{4}{2}\frac{6*5*4*3}{10*9*8*7} = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{\binom{10}{4}} \\
\mathbb{P}(E_3) &= \mathbb{P}(\{BBBG,\ BBGB,\ BGBB,\ GBBB\}) \\
&= \binom{4}{3}\frac{6*5*4*4}{10*9*8*7} = \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{1}}{\binom{10}{4}} \\
\mathbb{P}(E_4) &= \mathbb{P}(\{BBBB\}) \\
&= \frac{6*5*4*3}{10*9*8*7} = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}}
\end{aligned}$$

0n obtient maintenant la nouvelle loi de probabilité

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\mathbb{P}(X=k)$	0.0048	0.1143	0.4286	0.3810	0.0714

Exercice 5.

1. La variable X est égale à la somme de N variables indépendantes prenant les valeurs 0 si le voyage est annulé ou 1 s'il est maintenu : X suit donc une loi binomiale de paramètre $N = 75$ et $p = 15\%$. Son espérance est donc égale à $\mathbb{E}[X] = Np = 11.25$ et son écart-type à $\sigma(X) = \sqrt{Np(1-p)} = 3.1$.

2. Le coût annuel est aussi une variable aléatoire car il dépend du nombre de voyages efféctivement maintenus, on obtient

$$CA = AX, \quad CB = \frac{1}{2}AX + B.$$

Les coûts moyens de chaque abonnement sont donc

$$\mathbb{E}[CA] = NpA = 1350, \quad \mathbb{E}[CB] = \frac{1}{2}NpA + B = 1095.$$

3. « $CB > CA$ » est un événement ; sa probabilité est égale à :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(CB > CA) &= \mathbb{P}(\frac{1}{2}XA + B > XA) = \mathbb{P}(X < \frac{2B}{A}) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{X - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} < \frac{2B/A - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\Big) \simeq 8\%.\end{aligned}$$