Corrigé de l'examen de Mai 2007

Exercice 1.

1. La matrice du système linéaireest donnée par

$$M = \begin{bmatrix} m & -1 \\ 2-m & -m \end{bmatrix}$$

2. Le déterminant de M est donné par, $\det(M) = -m^2 - m + 2$. La matrice M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $m = 1$ ou $m = -2$.
3. On cherche à résoudre le système par une méthode de substitution. On écrit y comme une focntion de x, $y = mx - m^2 - m$, puis on remplace dans la deuxième équation et aprés calcul on obtient

$$x(2 - m - m^2) = -m^3 - m^2 - 4m + 6.$$

On regarde pour quelles valeurs de m, le coefficient de x s'annule.

(a) Ou bien $m = 1$, l'équation devient $0x = 0$, l'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{(x, x-2) : x \text{ quelconque }\}$.

(b) Ou bien $m = -2$, l'équation devient $0x = 18$ qui est impossible et donne comme ensemble de solutions $\mathcal{S} =$ ensemble vide .

(c) Ou bien $m \neq 1$ et $m \neq -2$, l'ensemble des solutions est réduit à un singleton (x, y) donné par

$$x = \frac{-m^3 - m^2 - 4m + 6}{-m^2 - m + 2} = \frac{m^2 + 2m + 6}{m + 2},$$
$$y = mx - m^2 - m = \cdots = \frac{m(4 - m)}{m + 2}.$$

Exercice 2.

1. Partie théorique. On appelle p^{obs} la proportion observée dans l'échantillon correspondant à une valeur particulière de l'estimateur $\hat{p}$. On note p la proportion réelle des huîtres dans tout le bassin. Si α désigne l'ereur qu'on s'autorise, p admet l'encadrement suivant

$$p = \hat{p} \pm z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}, \quad \hat{p} = p^{obs},$$

où n désigne la taille de l'échantillon et $z_\alpha = q_{1-\alpha/2}$ est donné par les quantiles de la loi normale centrée réduite.

2. Partie numérique. On trouve
$$n = 200 \qquad \alpha = 5\% \qquad p^{obs} = 0.16$$
$$z_\alpha = 1.96 \quad p_{min} = 0.109 \quad p_{max} = 0.211$$
d'où l'encadrement $0.10 \leq p \leq 0.22$.

Exercice 3.

1. Partie théorique. Il s'agit d'un test d'hypothèse d'indépendance. L'hypothèse nulle est $H_0 =$ « le niveau d'instruction ne dépend pas du sex de l'individu ». L'estimateur associé à un tel test est donné par
$$D = \sum_i \sum_j \frac{(n_{ij} - n_{i.}n_{.j}/n)^2}{n_{i.}n_{.j}/n}$$
où i décrit le sex et j décrit les différents niveaux d'instruction; n_{ij} est le nombre d'individus de sex et de niveau d'instruction donnés, $n_{i.}$ est soit le nombre, soit le nombre de femmes, $n_{.j}$ est le nombre de personnes de niveau d'instruction donné. On prend comme ensemble de rejet $\mathcal{R} = \{D \geq q_{1-\alpha}\}$, où q_β est le quantile d'ordre β du chi-deux à $ddl = (4-1)(2-1) = 3$ degrés de liberté.
2. Partie numérique. On obtient,
$$n = 2080 \quad \alpha = 0.05, \quad ddl = 3 \quad q_{1-\alpha} = 7.815$$

$\boldsymbol{n_{i.}n_{.j}/n}$	**aucun**	**CAP BEP**	**BAC**	**BAC $\geq$ 2**	$\boldsymbol{n_{i.}}$
homme	101	196	507	189	992
femme	110	214	556	207	1088
$\boldsymbol{n_{.j}}$	211	410	1063	396	2080

Le calcul de la variable de décision donne $D = 16.14$.
3. Conclusion. On observe que $D > q_{1-\alpha}$. On rejette donc H_0 : le niveau d'instruction dépend du sex de l'individu. La p-valeur du test est la plus petite erreur possible β permettant de rejeter encore H_0 : elle se calcule en résolvant l'équation
$$q_{1-\beta} = D, \quad \beta = 1 - F(D),$$
où F est la fonction de répartition d'un chi-deux $\chi^2(3)$. On obtient p-valeur $= 10^{-3}$.

Exercice 4.

1. La figure suivante réunit à la fois les données réelles correspondant aux écarts de température en fonction de l'année et la droite de régression

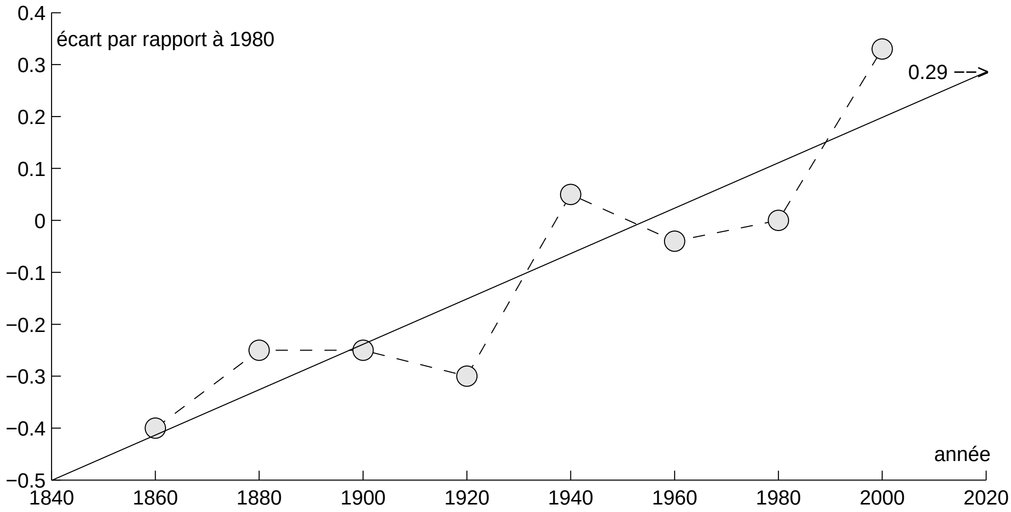

FIG. 1 – La température en fonction de l'année

2. La formule théorique donnant les écarts de température y en fonction de l'année x est obtenue par

$$y = \hat{a}x + \hat{b}, \quad \hat{a} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}.$$

On obtient numériquement

$$\bar{x} = 1930, \quad \bar{y} = -0.1075, \quad \hat{a} = 4.37\ 10^{-3}, \quad \hat{b} = -8.6.$$

3. En extrapolant pour l'année 2020, on obtient

$$y = \hat{a} \times 2020 + \hat{b} = 0.29.$$