Corrigé de l'examen de novembre 2006

Exercice 1.

1. On utilise deux fois sur $\cos(x^2)$ la méthode d'intégration par partie

$$\begin{aligned}\int \cos(x^2)\,dx &= x\cos(x^2) + \int 2x^2\sin(x^2)\,dx \\ &= x\cos(x^2) + \frac{2}{3}x^3\sin(x^2) - \int \frac{4}{3}x^4\cos(x^2)\,dx\end{aligned}$$

   En réunissant les termes $\cos(x^2)$ du même côté, on obtient

$$\int \left(1+\frac{4}{3}x^4\right)\cos(x^2)\,dx = x\cos(x^2) + \frac{2}{3}\sin(x^2) + cte$$

2. On obtient

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\,dx = \left[x\cos(x^2) + \frac{2}{3}\sin(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = -\sqrt{\pi}.$$

Exercice 2.

1. Cette équation est d'ordre 1.
2. Cette équation est non linéaire en y à cause du terme $-ky^2$.
3. Il suffit de vérifier que l'équation (E) est établie avec la fonction $y(x)$ donnée dans l'énoncé.

$$y' = \frac{r^2}{k}\frac{\exp(-rx)}{(1+\exp(-rx))^2} = y(r-ky).$$

4. Si on laisse évoluer le système vers l'infini, $x \to +\infty$, la surface de la colonie $y(x)$ tend vers r/k, soit numériquement $r/k = 2/0.4 = 5$ cm^2.

Exercice 3.

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 4 = 0$ est admet pour racine $r = \pm 2$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}.$$

   On recherche d'abord une solution particulière de l'équation $y'' - 4y = e^{2x}$ sous la forme $y(x) = Axe^{2x}$ (car en effet l'exposant 2 est en résonance simple avec les racines). On trouve $y' = A(1+2x)e^{2x}$, $y'' =$

$A(4+4x)e^{2x}$ et alors $y''-4y=4Ae^{2x}$. Nécessairement $A=\frac{1}{4}$. On trouve
$$y(x)=\frac{1}{4}xe^{2x}.$$
On recherche maintenant une solution particulière de l'équation $y''-4y=e^{-2x}$ sous la forme $y(x)=Ax^{-2x}$ pour les mêmes raisons que précédement. On trouve après calcul
$$y(x)=-\frac{1}{4}xe^{-2x}.$$
On applique alors le principe de superposition des solutions pour obtenir comme solution particulière de $y''-4y=\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})$, la solution $y(x)=\frac{1}{8}x(e^{2x}+e^{-2x})$. La solution générale de l'équation non homogène est donc
$$y(x)=Ae^{2x}+Be^{-2x}+\frac{1}{8}x(e^{2x}+e^{-2x}).$$

2. Si on impose en plus $y(0)=0$ et $y'(0)=1$, on trouve $y'(x)=2Ae^{2x}-2Be^{2x}+\frac{1}{8}(e^{2x}+e^{-2x})+\frac{1}{8}x(2e^{2x}-2e^{-2x})$. les inconnues A et B doivent vérifier
$$y(0)=A+B=0,\quad y'(0)=2A-2B+\frac{1}{4}=1$$
On obtient $A=3/16$ et $B=-3/16$. La solution vérifiant (NH) et les conditions initiales est donc
$$y(x)=\frac{3}{16}(e^{2x}-e^{-2x})+\frac{1}{8}x(e^{2x}+e^{-2x}).$$

Exercice 3. L'ensemble fondamentale est ici
$$\Omega=\{\text{ « 2 cartes (non triées) choisies parmi 52 cartes » }\}.$$
Son cardinal est $\mathrm{Card}(\Omega)=\binom{52}{2}=52\times 51/2$.

1. L'événement $A=$ « une des cartes est au moins un trèfle » peut s'écrire comme réunion disjointe des deux événements $A_1=$ une seule carte est un trèfle » et $A_2=$ « les deux cartes sont des trèfles ». Dénombrer A_1 consiste à choisir d'abord 1 trèfle parmi les 13 trèfles, puis par choisir 1 carte quelconque parmi les autres $52-13=39$ cartes restantes. On obtient $\mathrm{Card}(A_1)=13\times 39$. Pour dénombrer A_2 il suffit de choisir 2 cartes quelconques parmis les 13 cartes trèfle. On obtient $\mathrm{Card}(A_2)=\binom{13}{2}=13\times 12/2$. Finalement
$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)=\frac{13\times 39+13\times 6}{26\times 51}=44\%.$$

2. On note B l'événement $B =$ « une carte est un coeur, l'autre est un pique ». Dénombrer B consiste à choisir 1 carte au hasard parmi 13 coeurs, puis 1 carte au hasard parmi 13 piques. On trouve $\mathrm{Card}(B) = 13 \times 13$. Soit
$$\mathbb{P}(B) = \frac{13 \times 13}{26 \times 51} = 13\%.$$
3. On note C l'événement $C =$ « les deux cartes ont la même hauteur ». Pour dénombrer C, on commence par choisir une hauteur, puis 2 couleurs parmi 4. On obtient $\mathrm{Card}(C) = 13 \times \binom{4}{2} = 13 \times 6$. D'où
$$\mathbb{P}(C) = \frac{13 \times 6}{26 \times 51} = 6\%.$$

Exercice 4. Les 3 personnes sont numérotées de 1 à 3. La première personne possède la manteau a, la deuxième, le manteau b et la troisième, le manteau c. L'ensemble fondamental Ω consiste en l'ensemble de tous les triplets (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), …décrivant le manteau pris par chaque personne dans chaque cas de figure : par exemple (b, a, c) traduit le cas où la personne 1 a pris le manteau b, la personne 2, le manteau a et la personne 3, le manteau c. On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 3! = 6$.

1. $A =$ « tous les 3 récupèrent leur manteau » $= \{(a, b, c)\}$. On obtient
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}.$$
2. $B =$ « un seul récupère son manteau » $= \{(a, c, b), (c, b, a), (b, a, c)\}$. On obtient
$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$
3. $C =$ « 2 personnes exactement récupèrent leur manteau ». C'est impossible et on obtient
$$\mathbb{P}(C) = 0.$$
4. $D =$ « aucun des 3 ne récupère leur manteau » $= \{(b, c, a), (c, a, b)\}$. On obtient
$$\mathbb{P}(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$
On constate bien sûr que la somme des probabilités précédentes est égale à 1.