Tôhoku Math. J.
42 (1990), 289–306

SUR LES ESPACES DE STEIN QUASI-COMPACTS EN GEOMETRIE RIGIDE

QING LIU

(Received March 20, 1989, revised March 7, 1990)

Introduction. Les espaces de Stein en géométrie analytique complexe sont caractérisés par le fait que $H^q(X, \mathscr{F})=0$ pour tout $q \geqslant 1$ et pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X ([S1]). En géométrie algébrique, cette condition de nullité des groupes de cohomologie caractérise les variétés affines, c'est le critère de Serre ([S2]). Comme il y a une forte analogie entre la géométrie algébrique et la géométrie analytique rigide, les variétés affines correspondant aux espaces affinoïdes, on peut se demander si l'analogue du critère de Serre est valable en géométrie analytique rigide. C'est-à-dire:

Les espaces affinoïdes sont-ils exactement les espaces analytiques rigides séparés X vérifiant $H^q(X, \mathscr{F})=0$ pour tout $q \geqslant 1$ et pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X (nous appelons un tel espace un espace de Stein)?

Un théorème de Tate et Kiehl montre que les espaces affinoïdes sont de Stein ([K]). L'inverse est faux sans restriction sur X. En effet, Kiehl a introduit et étudié les espaces X (appelés quasi-espaces de Stein) qui admettent un recouvrement admissible affinoïde $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ tel que $X_n \subset X_{n+1}$ et que la restriction $\mathcal{O}_X(X_{n+1}) \rightarrow \mathcal{O}_X(X_n)$ soit dense pour tout $n \geqslant 0$ ([K]). Ce sont des espaces de Stein dans le sens défini ci-dessus. Par suite, d'autres auteurs ont approfondi l'étude de ces espaces ([Lüt], [H]). Les quasi-espaces de Stein ne sont pas quasi-compacts (i.e. n'admettent pas de recouvrement admissible affinoïde fini) sauf cas trivial, donc non affinoïde en général. Il est donc clair que pour le problème ci-dessus, il faut au moins supposer X quasi-compact. Avec cette hypothèse supplémentaire, une réponse positive nous semblait très plausible ainsi qu'à divers spécialistes interrogés à ce sujet. Malheureusement, on a trouvé un contre-exemple dans [L]. Cependant, c'est un espace ayant deux composantes irréductibles qui se coupent, donc un espace singulier, et le procédé utilisé ne permet pas de fabriquer de contre-exemple non singulier. La question suivante paraît alors naturelle:

Un espace de Stein quasi-compact régulier est-il affinoïde?

Pour répondre à cette question, nous avons été obligés d'envisager une étude détaillée des espaces de Stein quasi-compacts. On a alors trouvé un critère simple (Théorème 2) pour qu'un espace quasi-compact soit de Stein et qui a permis de construire un contre-exemple à la question ci-dessus (Théorème 4). Ce contre-exemple est un ouvert

---

Ce travail a été réalisé pendant le séjour de l'auteur à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques que nous remercions de son hospitalité.

analytique X de $\boldsymbol{B}_K^2 = \mathrm{Spm}\, K\langle T, S\rangle$ (où K est un corps complet ultramétrique quelconque) tel que $\mathcal{O}_{\boldsymbol{B}_K^2}(X)$ ne soit pas une K-algèbre affinoïde. Cela montre en passant que l'analogue d'un théorème de Zariski (qui dit que pour toute surface algébrique normale S sur un corps K, $\mathcal{O}_S(S)$ est une K-algèbre de type fini [Z]) en géométrie rigide est faux. Ce contre-exemple montre aussi que la classe des espaces de Stein quasi-compacts est "beaucoup plus grande" que celle des espaces affinoïdes. Cependant, on verra dans ce travail qu' "en général" les propriétés des espaces affinoïdes ne concernant pas la réduction restent valables.

Le § 1 donne la définition et quelques propriétés immédiates des espaces de Stein quasi-compacts. Au § 2, on étend de façon évidente la notion de parties rationnelles aux espaces quasi-compacts. On introduit la notion (provisoire) de S-espaces X qui sont définis par (a) X est holomorphiquement séparable, (b) $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $q > 0$. On montre que certains résultats concernant les parties rationnelles d'un espace affinoïde s'étendent aux parties rationnelles d'un S-espace X. Cela permet de donner au § 3 une version généralisée du théorème de Gerritzen et Grauert:

THÉORÈME 1. *Soit $f: R \to X$ une immersion injective d'un espace affinoïde R dans un S-espace X. Alors il existe un recouvrement admissible fini $\{X_i\}_i$ de X par des parties rationnelles telles que pour tout i, $f: f^{-1}(X_i) \to X_i$ soit une immersion de Runge (i.e. l'homomorphisme induit $\mathcal{O}_X(X_i) \to \mathcal{O}_R(f^{-1}(X_i))$ est dense).*

Il suit de ce théorème que tout espace de Stein quasi-compact admet un recouvrement admissible fini par des parties rationnelles affinoïdes et une immersion injective dans un espace affinoïde (corollaire 1 et proposition 3.3). Le résultat principal suivant est démontré au § 4.

THÉORÈME 2. *Soit X un espace analytique rigide quasi-compact et séparé. Alors X est un espace de Stein si et seulement si X est holomorphiquement séparable et $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $q > 0$.*

On en tire quelques conséquences immédiates. En particulier le

THÉORÈME 3. *Soient X, Y deux espaces de Stein quasi-compacts, Z un espace analytique séparé, $f: X \to Z$, $g: Y \to Z$ deux morphismes. Alors $W := X \times_Z Y$ est aussi un espace de Stein. De plus, notons $A = \mathcal{O}_X(X)$, $B = \mathcal{O}_Y(Y)$, $C = \mathcal{O}_Z(Z)$. Alors si Z est un espace de Stein quasi-compact, l'homomorphisme canonique $A \hat{\otimes}_C B \to \mathcal{O}_W(W)$ (où $A \hat{\otimes}_C B$ est le séparé complété de $A \otimes_C B$ pour la semi-norme tensorielle) est un isomorphisme.*

Enfin, la motivation principale de ce travail, c'est-à-dire la construction d'un espace de Stein quasi-compact régulier qui n'est pas affinoïde est exposée au § 5.

Nous remercions Jean Fresnel qui a éveillé notre intérêt pour ce sujet et nous a aidé dans ce travail. Nous remercions également Michel Raynaud dont la lettre [R] a inspiré la prop. 1.2., Berkovich pour une version améliorée du théorème 3 et le referee pour ses nombreux commentaires.

Dans tout ce travail, K désigne un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique. Tous les espaces analytiques rigides sont définis sur K. *Espace analytique* signifie espace analytique rigide.

1. Espaces de Stein, définition et propriétés immédiates.

DÉFINITION 1.1. On appelle *espace de Stein quasi-compact* tout espace analytique rigide X quasi-compact (i.e. qui admet un recouvrement admissible affinoïde fini), séparé tel que $H^q(X, \mathscr{F})=0$ pour tout $q \geqslant 1$ et tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X.

REMARQUE. D'après le théorème de Tate-Kiehl ([K]), les espaces affinoïdes sont de Stein.

PROPOSITION 1.1 *Soit X un espace de Stein quasi-compact, soient $f: Y \to X$, $g: X \to Z$ deux morphismes finis d'espaces analytiques rigides. Alors on a les propriétés suivantes*:

(a) *L'espace Y est de Stein. En particulier, tout fermé analytique de X est de Stein.*
(b) *Si g est surjectif, alors Z est de Stein.*

PREUVE. (a) Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur Y. Comme f est un morphisme fini, $f_*\mathscr{F}$ est un faisceau cohérent sur X et on a $H^q(Y, \mathscr{F})=H^q(X, f_*\mathscr{F})=0$ pour tout $q>0$. Donc Y est de Stein. Enfin pour tout fermé analytique F de X, l'immersion fermée canonique $F \to X$ est un morphisme fini, donc F est de Stein.

(b) Voir [L] prop. 2.

NOTATION 1. Soient X un espace analytique quasi-compact, $A=\mathcal{O}_X(X)$, M un A-module de type fini. On note $\tilde{M}$ le faisceau cohérent sur X défini de la façon suivante: soient $\{X_i\}_i$ un recouvrement admissible affinoïde de X, $\mathscr{M}_i$ le faisceau cohérent $(M \otimes_A \mathcal{O}_X(X_i))^\sim$ sur X_i associé au $\mathcal{O}_X(X_i)$-module $M \otimes_A \mathcal{O}_X(X_i)$. Alors $\tilde{M}$ est obtenu par le recollement des $\mathscr{M}_i$. Il est clair que $\tilde{M}$ ne dépend pas du choix de $\{X_i\}_i$ à isomorphisme près.

LEMME 1. *Soient X un espace de Stein quasi-compact, $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X, L un A-module ($A=\mathcal{O}_X(X)$), $\varphi: L \to \mathscr{F}(X)$ un homomorphisme. On suppose qu'il existe un recouvrement admissible affinoïde fini $\{X_i\}_i$ de X tel que les homomorphismes $\varphi_i: L \otimes_A \mathcal{O}_X(X_i) \to \mathscr{F}(X_i)$ induits par φ soient surjectifs. Alors il existe un sous A-module de type fini L_0 de L tel que $\varphi(L_0)=\mathscr{F}(X)$.*

PREUVE. Il existe $l_1, \cdots, l_N \in L$ tels que $\mathscr{F}(X_i)=\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \varphi(l_j)|_{X_i}\mathcal{O}_X(X_i)$ pour tout i. Les sections $\varphi(l_1), \cdots, \varphi(l_N)$ définissent un homorphisme surjectif $\varphi: \mathcal{O}_X^N \to \mathscr{F}$. Comme X est de Stein, $\varphi(X): A^N \to \mathscr{F}(X)$ est surjectif. Ce qui montre que $\mathscr{F}(X)=\varphi(\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} l_j A)$.

PROPOSITION 1.2. *Soient X un espace de Stein quasi-compact, $A=\mathcal{O}_X(X)$. Alors on a les propriétés suivantes*:

(a) *L'anneau A est noethérien.*

(b) *Pour tout ouvert admissible affinoïde R de X, l'homomorphisme canonique $A \to \mathcal{O}_X(R)$ est plat.*

(c) *Pour tout A-module M de type fini, l'homomorphisme naturel $M \to \tilde{M}(X)$ (voir Notation 1 ci-dessus) est un isomorphisme.*

(d) *Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, $\mathcal{F}(X)$ est un A-module de type fini et l'homomorphisme canonique $\mathcal{F}(X)^{\sim} \to \mathcal{F}$ est un isomorphisme.*

Preuve. (a) Soient I un idéal de A, $\mathcal{T}$ le sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$ engendré par I. On applique le lemme 1 avec $L = I$, $\mathcal{F} = \mathcal{T}$ et $\varphi : I \to \mathcal{T}(X)$ l'application canonique. Alors il existe un idéal de type fini I_0 contenu dans I tel que $\varphi(I_0) = \mathcal{T}(X)$. Or φ est injectif, donc $I = I_0$ est de type fini.

(b) On conserve les notations de (a). Soit $\theta : \tilde{I} \to \mathcal{T}$ l'homomorphisme surjectif canonique. On a $\varphi = \theta(X) \circ \psi$, où $\psi : I \to \tilde{I}(X)$ est canonique. Il suit du lemme 1 que ψ est surjectif. D'après (a), φ est bijectif, donc $\theta(X)$ est bijectif. Soit $\mathcal{G} = \operatorname{Ker} \theta$, alors $\mathcal{G}(X) = 0$. Comme X est de Stein, il est aisé de voir que $\mathcal{G}(X)$ engendre $\mathcal{G}_x$ pour tout $x \in X$. Donc $\mathcal{G} = 0$, θ est un isomorphisme. Il suit que l'homomorphisme canonique $I \otimes_A \mathcal{O}_X(R) = \tilde{I}(R) \to \mathcal{I}(R) = I\mathcal{O}_X(R)$ est un isomorphisme. Cela étant vrai pour tout idéal I de A, $A \to \mathcal{O}_X(R)$ est plat.

(c) On a une suite exacte de A-modules de type fini

$$0 \to N \to A^n \to M \to 0 .$$

D'après (b), cela induit une suite exacte de faisceaux cohérents

$$0 \to \tilde{N} \to \mathcal{O}_X^n \to \tilde{M} \to 0 .$$

On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{N}(X) & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow & \tilde{M}(X) & \longrightarrow & 0 , \end{array}$$

où les flèches verticales sont canoniques et les suites horizontales exactes. D'après le lemme 1, α_1, α_2 sont surjectifs. Cela implique que α_2 est bijectif.

(d) Pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}(X)$ engendre $\mathcal{F}_x$. Donc pour tout ouvert affinoïde admissible R de X, $\mathcal{F}(X)$ engendre $\mathcal{F}(R)$. On peut appliquer le lemme 1 avec $L = \mathcal{F}(X)$, $\varphi = Id$. Il suit que $\mathcal{F}(X)$ est de type fini. L'homomorphisme canonique $\alpha : \mathcal{F}(X)^{\sim} \to \mathcal{F}$ est surjectif. D'après (c), $\operatorname{Ker} \alpha(X) = 0$, done $\operatorname{Ker} \alpha = 0$ et α est un isomorphism.

Corollaire 1.2.1. *Soient X un espace de Stein quasi-compact, $A = \mathcal{O}_X(X)$. Alors $\dim X = \dim A$; X est réduit (resp. normal; resp. réduit et irréductible) si et seulement si A est réduit (resp. normal; resp. intègre).*

Preuve. Montrons par exemple que X est réduit si et seulement si A est réduit. Soit $\mathcal{N}$ le sous-faisceau cohérent des éléments nilpotents de $\mathcal{O}_X$ (i.e. pour tout ouvert affinoïde R de X, $\mathcal{N}(R)$ est égal à l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathcal{O}_X(R)$). Comme X est quasi-compact, $\mathcal{N}(X)$ est égal à N l'ensemble des nilpotents de A. D'après la prop. 1.2. (d), on a $\mathcal{N} \simeq \tilde{N}$. Donc si A est réduit, alors $\mathcal{N}=0$ et X est réduit. L'inverse est toujours vrai.

NOTATION 2. Soient X un espace analytique, $A=\mathcal{O}_X(X)$, $x \in X$, $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors l'image réciproque de $\mathfrak{m}_x$ par l'homomorphisme canonique $A \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un idéal maximal de A. Cela définit une application notée α_X: $X \to \operatorname{Max} A$ de X dans l'ensemble des idéaux maximaux $\operatorname{Max} A$ de A. On note $\hat{A}_\mathfrak{m}$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$) où $\mathfrak{m}=\alpha_X(x)$, le complété $\mathfrak{m}$-adique (resp. $\mathfrak{m}_x$-adique) de $A_\mathfrak{m}$ (resp. de $\mathcal{O}_{X,x}$).

PROPOSITION 1.3. *Soit X un espace de Stein quasi-compact. Alors on a les propriétés suivantes* (*voir Notation* 2 *ci-dessus*):

(a) *L'application α_X: $X \to \operatorname{Max} A$ est bijective.*

(b) *Pour tout $x \in X$, l'homomorphisme canonique $\hat{A}_{\alpha_X(x)} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est un isomorphisme.*

PREUVE. (a) Soient $x \neq y$ deux points de X. Alors le noyau de l'homomorphisme canonique f: $A \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \oplus \mathcal{O}_{X,y}/\mathfrak{m}_y$ n'est pas un idéal maximal car f est surjectif. Donc α_X est injectif.

Soit $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Si $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Im} \alpha_X$, alors $\tilde{\mathfrak{m}}=\mathcal{O}_X$. D'après la prop. 1.2 (c), cela implique que $\mathfrak{m}=A$, impossible. Donc α_X est surjectif.

(b) Cette propriété est vraie plus généralement pour les S-espaces (voir prop. 2.4).

2. Parties rationnelles, S-espaces.

DEFINITION 2.1. Soit X un espace analytique quasi-compact. On appelle *partie rationnelle de X* tout ouvert analytique U de X de la forme $U=\{x \in X \mid |f_i(x)| \leqslant |f_0(x)|, 0 \leqslant i \leqslant n\}$, où $f_0, \cdots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ engendrent l'idéal unité.

REMARQUE. Soient $g_0, \cdots, g_m \in \mathcal{O}_X(X)$ sans zéro commun sur X. Alors l'ouvert analytique $V=\{x \in X \mid |g_i(x)| \leqslant |g_0(x)|, 0 \leqslant i \leqslant m\}$ est une partie rationnelle de X. En effect, X étant quasi-compact, il existe $\pi \in K^*$ tel que $|g_0(x)| \geqslant |\pi|$ pour tout $x \in X$. Donc V est la partie rationnelle $\{x \in X \mid |g_i(x)| \leqslant |g_0(x)|, |\pi| \leqslant |g_0(x)|, 0 \leqslant i \leqslant m\}$.

PROPOSITION 2.1. *Soit f: $Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques quasi-compacts, soient U, V deux parties rationnelles de X. Alors $f^{-1}(U)$ est une partie rationnelle de Y et $U \cap V$ est une partie rationnelle de X.*

PREUVE. C'est immédiat (cf. [B, G, R], pp. 282–283).

DEFINITION 2.2. Soit X un espace analytique quasi-compact. On dit que X est *holomorphiquement séparable* si l'application α_X: $X \to \operatorname{Max} \mathcal{O}_X(X)$ (cf. Notation 2 du § 1) est injective. On dit que X est un S-espace s'il est séparé, holomorphiquement séparable et vérifie $H^q(X, \mathcal{O}_X)=0$ pour tout $q \geqslant 1$. Ainsi tout espace de Stein quasi-compact est un S-espace.

REMARQUE 1. La terminologie de S-espaces est tout à fait provisoire car il sera démontré (Théorème 2) que ce sont exactement les espaces de Stein quasi-compacts.

REMARQUE 2. Soit X un espace analytique quasi-compact. Alors l'algèbre $A=\mathcal{O}_X(X)$ peut être munie d'une norme de Banach $\| \ \|$ de la façon suivante: soient $\{X_i\}_i$ un recouvrement admissible affinoïde fini de X, $\| \ \|_i$ une norme de Banach sur $\mathcal{O}_X(X_i)$. Pour tout $f\in A$, on pose $\|f\|=\max_i \|f|_{X_i}\|_i$. Si l'on change le choix de $\{X_i, \| \ \|_i\}_i$, on obtient une norme équivalente. *Dans la suite, A sera munie de la topologie définie par ces normes équivalentes.* Pour $n\in \boldsymbol{N}$, on note

$$A\langle T_1, \cdots, T_n\rangle=\left\{\sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in \boldsymbol{N}^n} a_\nu T_1^{\nu_1}\cdots T_n^{\nu_n} \;\middle|\; a_\nu\in A,\ \lim_{\nu\to\infty} a_\nu=0\right\}.$$

C'est de façon évidente une K-algèbre de Banach. Si M est un A-module topologique, on définit de façon analogue un $A\langle T_1, \cdots, T_n\rangle$-module topologique $M\langle T_1, \cdots, T_n\rangle$.

PROPOSITION 2.2. *Soient X un S-espace, $A=\mathcal{O}_X(X)$, $f_0, \cdots, f_n\in A$ tels que $\sum_{0\leqslant i\leqslant n} f_iA=A$, $U=\{x\in X \mid |f_i(x)|\leqslant |f_0(x)|,\ 0\leqslant i\leqslant n\}$, I l'idéal de $A\langle T_1, \cdots, T_n\rangle$ engendré par les $T_if_0-f_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Alors U est un S-espace. De plus, soit M un A-module topologique, de type fini, tel que $H^q(X, \tilde{M})=0$ pour tout $q\geqslant 1$, alors $H^q(U, \tilde{M}|_U)=0$ pour tout $q\geqslant 1$ et l'homomorphisme canonique*

$$\varphi: M\langle T_1, \cdots, T_n\rangle/IM\langle T_1, \cdots, T_n\rangle \to \tilde{M}(U)$$

défini par $\varphi(T_i)=f_i|_U(f_0|_U)^{-1}$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels de Banach.

PREUVE. Remarquons d'abord qu'étant ouvert analytique de X, U est holomorphiquement séparable.

(α) Cas où $n=1, f_0=1$. On note $f=f_1$, $\boldsymbol{B}_K^1=\operatorname{Spm} K\langle T\rangle$. Soient $Z=X\times_K \boldsymbol{B}_K^1$, $\mathcal{F}$ le faisceau cohérent sur Z défini par $\mathcal{F}(R\times \boldsymbol{B}^1)=\tilde{M}(R)\langle T\rangle$ pour tout ouvert affinoïde R de X. Alors U peut être identifié au fermé analytique $V((T-f)\mathcal{O}_Z)$ de Z et $\tilde{M}|_U$ à $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{O}_{V((T-f)\mathcal{O}_Z)}=\mathcal{F}/(T-f)\mathcal{F}$.

Montrons que l'homomorphisme surjectif $\mathcal{F}\xrightarrow{\cdot(T-f)}(T-f)\mathcal{F}$ est bijectif. Soient R un ouvert affinoïde de X, $b_n\in\tilde{M}(R)$, $n\geqslant 0$, tels que $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$ et $(T-f|_R)\times\sum_{n\geqslant 0} b_nT^n=0$. On a $f^{n+1}|_R b_n=0$ pour tout $n\geqslant 0$. Il existe $N>0$ tel que le sous-module de $\tilde{M}(R)$ engendré par les b_n, $n\geqslant 0$, soit engendré par $b_0, \cdots, b_N$. Donc pour tout $n\geqslant 0$, $b_n=f^{N+1}|_R b_{n+N+1}\in\sum_{0\leqslant i\leqslant N} f^{N+1}|_R b_i\tilde{M}(R)=\{0\}$. Donc $\mathcal{F}\xrightarrow{\cdot(T-f)}(T-f)\mathcal{F}$ est un isomorphisme.

De la suite exacte

$$0\to(T-f)\mathcal{F}\to\mathcal{F}\to\mathcal{O}_{V((T-f)\mathcal{O}_Z)}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{F}\to 0$$

on déduit les suites exactes

$$H^q(Z, \mathscr{F}) \to H^q(U, \tilde{M}|_U) \to H^{q+1}(Z, (T-f)\mathscr{F})$$

pour tout $q \geq 1$. Comme $H^q(X, \tilde{M})=0$, on a $H^q(Z, \mathscr{F})=0$ et $H^{q+1}(Z, (T-f)\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^{q+1}(Z, \mathscr{F})=0$, D'où $H^q(U, \tilde{M}|_U)=0$. Donc U est un S-espace. Enfin la suite exacte

$$0 \to (T-f)\mathscr{F}(Z) \to \mathscr{F}(Z) \to \tilde{\mathrm{M}}(U) \to H^1(Z, (T-f)\mathscr{F})=0 .$$

donne l'isomorphisme $M\langle T\rangle/(T-f) \xrightarrow{\sim} \tilde{M}(U)$.

(β) Cas où $n=1, f_1=1$. La démonstration est la même qu'en (α) mais en plus facile.

(γ) Cas général. Il existe $\pi \in K^*$ tel que $U \subset V := \{x \in X \mid |f_0(x)| \geq |\pi|\}$. D'après ($\beta$), V est un S-espace. On pose $h_i = f_i|_V (f_0|_V)^{-1} \in \mathcal{O}_X(V)$. Alors $U = \{y \in V \mid |h_i(y)| \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$. Il suffit d'utiliser ($\alpha$) et une récurrence sur n pour conclure.

Proposition 2.3. *Soient X un S-espace, V une partie rationnelle de X, U une partie rationnelle de V. Alors U est une partie rationnelle de X.*

Preuve. On peut reprendre la démonstration du cas où X est affinoïde (cf. [F, P] p. 92). Il suffit de remarquer que si $V = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq |f_0(x)|, 0 \leq i \leq n\}$, avec $f_i \in A = \mathcal{O}_X(X)$ et $\sum_{0 \leq i \leq n} f_i A = A$, alors $A[f_0|_V^{-1} f_1|_V, \cdots, f_0|_V^{-1} f_n|_V]$ est dense dans $\mathcal{O}_X(V)$ d'après la proposition précédente.

Proposition 2.4. *Soient X un S-espace, U une partie rationnelle de X, $x \in U$, $A = \mathcal{O}_X(X)$, $B = \mathcal{O}_X(U)$. Alors les homomorphismes canoniques* (*voir Notation* 2 *du* §1).

$$\hat{A}_{\alpha_X(x)} \to \hat{B}_{\alpha_U(x)}, \quad \hat{A}_{\alpha_X(x)} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$$

sont des isomorphismes.

Preuve. (α) Montrons d'abord le premier isomorphisme dans le cas où $U = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$, $f_1, \cdots, f_n \in A$. Par une récurrence sur n, on peut supposer $n=1$. Notons $f = f_1$, $\mathfrak{m}_1 = \alpha_X(x)$, $\mathfrak{m}_2 = \alpha_U(x)$. On peut supposer $f \in \mathfrak{m}_1$. On a $B = A\langle T\rangle/(T-f)$, donc $B = \rho(A) + \rho(f)B$, où $\rho: A \to B$ est la restriction, et $\mathfrak{m}_2 = \rho(\mathfrak{m}_1) + \rho(f)B$. Il suit que les homomorphismes $A/\mathfrak{m}_1^l \to B/\mathfrak{m}_2^l$ induits par ρ sont bijectifs pour tout $l \geq 1$. Ce qui implique l'isomorphisme $\hat{A}_{\mathfrak{m}_1} \xrightarrow{\sim} \hat{B}_{\mathfrak{m}_2}$.

(β) Montrons l'isomorphisme $\hat{A}_{\alpha_X(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}$. Notons $\mathfrak{m}_1 = \alpha_X(x)$. Soit $\{X_1, \cdots, X_s\}$ un recouvrement admissible affinoïde de X tel que $x \in X_1$ et $x \notin X_i$ si $i \geq 2$. Soient $f_1, \cdots, f_n \in A$ tels que $\sum_{1 \leq j \leq n} f_j \mathcal{O}_X(X_1) = \mathfrak{m}_1 \mathcal{O}_X(X_1)$. Comme X est holomorphiquement séparable, on a $\mathfrak{m}_1 \mathcal{O}_X(X_i) = \mathcal{O}_X(X_i)$ si $i \geq 2$. Donc il existe $\pi \in K^*$ tel que la partie rationnelle $V = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq |\pi|, 1 \leq i \leq n\}$ soit contenue dans X_1. Il suit que V est un ouvert affinoïde de X. On a donc les deux isomorphies canoniques

$$\widehat{\mathcal{O}_X(V)_{\alpha_V(x)}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x} \quad \text{et} \quad \hat{A}_{m_1} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}_X(V)_{\alpha_V(x)}},$$

le deuxième isomorphisme résulte du cas (α). D'où le résultat.

(γ) Le premier isomorphisme dans le cas général. Il résulte du cas (β) que les homomorphismes canoniques $\hat{A}_{\alpha_X(x)} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ et $\hat{B}_{\alpha_U(x)} \to \hat{\mathcal{O}}_{U,x} = \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ sont bijectifs. Cela implique que $\hat{A}_{\alpha_X(x)} \to \hat{B}_{\alpha_U(x)}$ est bijectif.

3. Théorème de Gerritzen et Grauert pour les S-espaces.

DEFINITION 3.1 Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques. On dit que f est une *immersion injective* (resp. *immersion ouverte*) si f est injective et si pour tout $y \in Y$, l'homomorphisme $f_y^\#\colon \mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ est surjectif (resp. bijectif). Si Y est affinoïde, on dit que f est une *immersion de Runge* lorsque $f^\#(Y)\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Y(Y)$ est dense.

LEMME 1. *Soient X un espace analytique séparé, R un ouvert affinoïde de X tel que l'homorphisme $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(R)$ soit fini. Alors R est une réunion finie de composantes connexes de X.*

PREUVE. On peut supposer X connexe. Il faut alors montrer que $R = X$. Soit R' un ouvert affinoïde connexe de X tel que $R' \cap R \neq \varnothing$. Posons $Y = R \cup R'$. On a un diagramme commutatif d'homomorphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(Y)\hat{\otimes}_K\mathcal{O}_X(R') & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(R') \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} \\ \mathcal{O}_X(R)\hat{\otimes}_K\mathcal{O}_X(R') & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{O}_X(R \cap R') \end{array}$$

où les homomorphismes sont canoniques. On a φ_1 fini, φ_2 surjectif car X est séparé, il suit que φ_3 est fini. Soit F le fermé analytique $V(\operatorname{Ker}\varphi_3)$ de R', alors $R \cap R' \subset F$ et l'homomorphisme canonique $\varphi_4\colon \mathcal{O}_F(F) \to \mathcal{O}_F(R \cap R')$ est fini injectif, donc l'injection canonique $\operatorname{Spm}\varphi_4\colon R \cap R' \to F$ est surjectif, donc $R \cap R' = F$ est ouvert et fermé dans R'. Comme R' est connexe, on a $R \cap R' = R'$, donc $R' \subset R$. Cela implique que $X = R$.

PROPOSITION 3.1. *Soient X un S-espace, Y un ouvert affinoïde de X tel que $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(Y)$ soit dense. Alors Y est une partie rationnelle de X.*

PREUVE. C'est une conséquence aisée du lemme 1 et de la prop. 2.3 (voir [B,G,R] prop. 6, p. 306).

DEFINITION 3.2. Soient X un espace analytique quasi-compact, $f = \sum_{\nu \in N^n} a_\nu T^\nu \in \mathcal{O}_X(X)\langle T_1, \cdots, T_n\rangle$. On dit que *$f$ est régulier en T_n de degré s au point $x_0 \in X$* si $|a_{0,\ldots 0,s}(x_0)| \geqslant |a_\nu(x_0)|$ pour tout $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n) \neq (0, \cdots, 0, s)$ et si l'inégalité est stricte pour $\nu_n \geqslant s$.

LEMME 2 (de division). *Soient X un espace analytique quasi-compact, $A = \mathcal{O}_X(X)$, $f \in A\langle T_1, \cdots, T_n\rangle$ régulier en T_n de degré s en tout point de X. Alors pour tout $g \in A\langle T_1, \cdots, T_n\rangle$, il existe un unique couple (q, r) avec $q \in A\langle T_1, \cdots, T_n\rangle$, $r \in A\langle T_1, \cdots, T_{n-1}\rangle[T_n]$ tel que $\deg_{T_n}(r) < s$ et $g = qf + r$.*

Nous ne donnons pas la démonstration de ce lemme qui ne présente aucune difficulté particulière. On peut remarquer que sous l'hypothèse ci-dessus, $a_{0,\ldots,0}$ est inversible dans A.

THÉORÈME 1. *Soit f: $Y \to X$ une immersion injective d'un espace affinoïde dans un S-espace. Alors il existe un recouvrement admissible fini $\{X_i\}_i$ de X par des parties rationnelles, tel que pour tout i, f induise une immersion de Runge $f^{-1}(X_i) \to X_i$.*

PREUVE. Dans le cas où X est un espace affinoïde, l'enoncé n'est autre que le théorème de Gerritzen et Grauert ([G,G]). Or grâce aux propriétés des S-espaces démontrées au §2 et au lemme 2, la même démonstration (cf. [B,G,R] p. 309 ou [F] p. 133) s'adapte parfaitement au cas présent. Nous omettons donc la démonstration.

COROLLAIRE 1. *Soit R un ouvert affinoïde d'un S-espace X. Alors R est réunion d'un nombre fini de parties rationnelles de X. En particulier, X admet un recouvrement admissible par des parties rationnelles affinoïdes.*

PREUVE. C'est une conséquence immédiate du théorème 1 et des prop. 3.1 et 2.3.

PROPOSITION 3.2. *Soient X un espace de Stein quasi-compact, Y un espace analytique. Alors on a les propriétés suivantes:*

(a) *L'application canonique F:* $\mathrm{Mor}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Y(Y))$ *est bijective.*

(b) *Si Y est aussi un espace de Stein quasi-compact, alors un morphisme f: $Y \to X$ est une immersion fermée si et seulement si $F(f)$ est surjectif.*

PREUVE. (a) Supposons d'abord Y affinoïde. Soit φ: $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Y(Y)$ un homomorphisme de K-algèbres. D'après le théorème 1, X est réunion finie de parties rationnelles affinoïdes X_i. De façon évidente, chaque X_i induit une partie rationnelle Y_i de Y et on a un homomorphisme φ_i: $\mathcal{O}_X(X_i) \to \mathcal{O}_Y(Y_i)$ induit par φ (cf. prop. 2.2). Comme $X = \mathrm{Max}\, \mathcal{O}_X(X)$ (cf. prop. 1.3), on a $Y = \bigcup_i Y_i$. On a donc un morphisme $G(\varphi)$: $Y \to X$ obtenu en recollant les $\mathrm{Spm}\, \varphi_i$: $Y_i \to X_i$. Clairement l'application $\varphi \to G(\varphi)$ est l'inverse de F. Donc F est bijective. Le cas général s'obtient par recollement.

(b) La démonstration est du même type.

COROLLAIRE 3.2.1. *Soient X, Y deux espaces de Stein quasi-compacts. Alors X et Y sont isomorphes si et seulement si les K-algèbres $\mathcal{O}_X(X)$ et $\mathcal{O}_Y(Y)$ sont isomorphes. En particulier, X est affinoïde si et seulement si $\mathcal{O}_X(X)$ est affinoïde.*

PROPOSITION 3.3. *Soit X un espace de Stein quasi-compact. Alors il existe un espace affinoïde Y et une immersion injective f: $X \to Y$. Plus précisement, il existe un recouvrement admissible affinoïde $\{Y_i\}_i$ de Y tel que $\{f^{-1}(Y_i)\}_i$ soit un recouvrement admissible affinoïde de X et que f: $f^{-1}(Y_i) \to Y_i$ soit une immersion de Runge pour tout i (cf. déf.* 3.1).

PREUVE. Soit $\{X_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un recouvrement admissible de X par des parties rationnelles affinoïdes. Soient $A = \mathcal{O}_X(X)$, $f_{ij} \in A$, $g_{ij} \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant m$ tels que $\sum_{0 \leqslant j \leqslant m} f_{ij} g_{ij} = 1$ pour tout $i \leqslant n$ et $X_i = \{x \in X \mid |f_{ij}(x)| \leqslant |f_{i0}(x)|, 0 \leqslant j \leqslant m\}$. En vertu de la prop. 2.2 (appliquée à $M = \mathcal{O}_X(X)$), on a $\mathcal{O}_X(X_i) = A\langle f_{i1}|_{X_i} f_{i0}|_{X_i}^{-1}, \cdots, f_{im}|_{X_i} f_{i0}|_{X_i}^{-1}\rangle$. Comme $\mathcal{O}_X(X_i)$ est une K-algèbre affinoïde, elle est engendrée par des éléments de $A[f_{i1}|_{X_i} f_{i0}|_{X_i}^{-1}, \cdots, f_{im}|_{X_i} f_{i0}|_{X_i}^{-1}]$. Donc il existe $N \geqslant 1$, $l \geqslant 1$, $a_{ik} \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant l$

tels que $\mathcal{O}_X(X_i)=K\langle f_{i0}|_{X_i}^{-N}a_{i1},\cdots,f_{i0}|_{X_i}^{-N}a_{il}\rangle$ pour tout $i\leqslant n$. Quitte à remplacer les f_{ij} par f_{ij}^N, on peut supposer $N=1$. Soit $\lambda\in K^*$ tel que pour une norme de Banach $\|\ \|$ sur X (cf. la remarque 2 qui suit la déf. 2.2), on ait $\|f_{ij}\|\leqslant|\lambda|$, $\|g_{ij}\|\leqslant|\lambda|$, $\|a_{ik}\|\leqslant|\lambda|$ pour tout $i\leqslant n$, $j\leqslant m$ et $k\leqslant l$. Considérons l'homomorphisme

$$\varphi:\ B=K\langle T_{ij}, S_{ij}, U_{ik}\rangle_{1\leqslant i\leqslant n,\,0\leqslant j\leqslant m,\,1\leqslant k\leqslant l}\to A$$

défini par $\varphi(T_{ij})=\lambda^{-1}f_{ij}$, $\varphi(S_{ij})=\lambda^{-1}g_{ij}$, $\varphi(U_{ik})=\lambda^{-1}a_{ik}$. Soient I l'idéal de B engendré par les $1-\sum_{0\leqslant j\leqslant m}\lambda^2T_{ij}S_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $C=B/I$, t_{ij} les images canoniques respectives des T_{ij}. Alors φ se factorise à travers Ψ: $C\to A$. Posons $Y=\operatorname{Spm}C$, $Y_i=\{y\in Y|\ |t_{ij}(y)|\leqslant|t_{i0}(y)|, 0\leqslant j\leqslant m\}$, $1\leqslant i\leqslant n$. Alors Ψ induit un morphisme f: $X\to Y$ et on a $f^{-1}(Y_i)=X_i$, $\mathcal{O}_Y(Y_i)\to\mathcal{O}_X(X_i)$ est dense pour tout $i\leqslant n$. Donc f est une immersion injective.

4. Les S-espaces sont des espaces de Stein.

LEMME 1. *Soient X un espace de Stein quasi-compact, $A=\mathcal{O}_X(X)$, $f\in A-\{0\}$, $X_1=\{x\in X|\ |f(x)|\leqslant 1\}$, $X_2=\{x\in X|\ |f(x)|\geqslant 1\}$, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors les homomorphismes canoniques $\mathcal{F}(X)\otimes_A\mathcal{O}_X(X_i)\to\mathcal{F}(X_i)$, $i=1, 2$, sont des isomorphismes et on a $H^q(X_i, \mathcal{F}|_{X_i})=0$ pour tout $q\geqslant 1$.*

PREUVE. Démontrons le résultat pour $i=1$. L'autre cas se démontre exactement de la même façon.

D'après la proposition 2.2 (appliquée à $M=\mathcal{O}_X(X)$), on a

$$\mathcal{F}(X)\otimes_A\mathcal{O}_X(X_1)\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}(X)\otimes_A A\langle T\rangle/(T-f)\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}(X)\langle T\rangle/(T-f).$$

Comme A est noethérien et $\mathcal{F}(X)$ de type fini sur A (cf. prop. 1.2), on a $\mathcal{F}(X)\otimes_A A\langle T\rangle\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}(X)\langle T\rangle$. Il suit alors de la prop. 2.2 (appliquée à $M=\mathcal{F}(X)$) que

$$\mathcal{F}(X)\otimes_A\mathcal{O}_X(X_1)\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}(X)\langle T\rangle/(T-f)\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}(X)^{\sim}(X_1)=\mathcal{F}(X_1),$$

d'où le résultat.

LEMME 2. *Soient X un espace analytique séparé, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement admissible de X par des ouverts quasi-compacts U_i. On suppose que pour tout $p\geqslant 0$ et tout $s=(i_0,\cdots,i_p)\in I^{p+1}$, on a $H^q(U_s, \mathcal{F}|_{U_s})=0$ pour tout $q\geqslant 1$, où $U_s=U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p}$. Alors l'homomorphisme canonique $\check{H}^q(\{U_i\}_i, \mathcal{F})\to H^q(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout $q\geqslant 0$.*

PREUVE. Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement admissible affinoïde de X plus fin que $\mathcal{U}$. D'après le théorème de Tate-Kiehl ([K]), on a $\check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})\xrightarrow{\sim}H^q(X, \mathcal{F})$ et $\check{H}^q(U_s\cap\mathcal{V}, \mathcal{F}|_{U_s})=0$ pour tout $q>0$. Il suit que $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})\xrightarrow{\sim}\check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ pour tout $q\geqslant 0$ ([S3] chap. I, §4). D'où le lemme.

THÉORÈME 2. *Soit X un espace analytique rigide quasi-compact et séparé. Alors X est un espace de Stein si et seulement si X est un S-espace (cf. déf. 2.2).*

PREUVE. Un espace de Stein quasi-compact est clairement un S-espace. Supposons donc que X est un S-espace. Il faut montrer que c'est un espace de stein.

1ère étape. On suppose qu'il existe $f \in A = \mathcal{O}_X(X)$ tel que $X_1 := \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant 1\}$, $X_2 := \{x \in X \mid |f(x)| \geqslant 1\}$ soient de Stein.

Montrons que X est de Stein dans l'hypothèse ci-dessus. Posons $A = \mathcal{O}_X(X)$, $A_i = \mathcal{O}_X(X_i)$, $i = 1, 2$, $X_{12} = X_1 \cap X_2$ et $A_{12} = \mathcal{O}_X(X_{12})$. D'après le lemme 2, on a $\check{H}^1(\{X_1, X_2\}, \mathcal{O}_X) = 0$, on a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{d^0} A_{12} \longrightarrow 0 .$$

Comme ce sont des K-espaces vectoriels de banach, on a (*) il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $a_{12} \in A_{12}$, il existe $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ vérifiant $d^0(a_1, a_2) = a$ et

$$\max\{\| a_1 \|, \| a_2 \|\} \leqslant c \| a_{12} \| .$$

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, d'après le lemme 1, on a

$$(**) \qquad \mathcal{F}(X_i) \otimes_A A_{12} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(X_{12}), \qquad i = 1, 2 .$$

Par un calcul élémentaire (exactement comme celui de [B,G,R] lemme 5, pp. 378–380, les données nécessaires sont essentiellement les (*) (**) ci-dessus), on montre que le complexe de Čech $0 \to \mathcal{F}(\mathrm{X}) \to \mathcal{F}(X_1) \oplus \mathcal{F}(X_2) \to \mathcal{F}(X_{12}) \to 0$ est exact, donc $\check{H}^q(\{X_1, X_2\}, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \geqslant 1$. Donc X est un espace de Stein.

2ème étape. Considérons la propriété suivante

(P_n): Soit X un S-espace. On suppose qu'il existe $f_1, \cdots, f_n \in A = \mathcal{O}_X(X)$ tel que toute intersection de la forme $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ où $U_i = U_{i1} := \{x \in X \mid |f_i(x)| \leqslant 1\}$ ou $U_i = U_{i2} := \{x \in X \mid |f_i(x)| \geqslant 1\}$, est un espace de Stein. Alors X est de Stein.

On vient de montrer que (P_1) est vraie. Supposons (P_{n-1}) vraie, alors U_{n1} est un S-espace qui vérifie les hypothèses pour la propriété (P_{n-1}) avec les fonctions $f_1|_{U_{n1}}, \cdots, f_{n-1}|_{U_{n1}}$. Donc U_{n1} est de Stein. De même U_{n2} est de Stein. Par conséquent X est de Stein. Ce qui montre que la propriété (P_n) est vraie pour tout n.

3ème étape. Appelons recouvrement de Laurent ([B,G,R] p. 331) un recouvrement de X par les 2^n parties $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ (cf. notation dans l'énoncé de la propriété (P_n) ci-dessus). D'après le théorème 1, X admet un recouvrement admissible affinoïde $\mathcal{V}$ par des parties rationnelles de X. Par des arguments similaires à ceux de [B,G,R] pp. 332–334, on peut achever la démonstration du théorème par le raisonnement suivant: on peut supposer que $\mathcal{V}$ est un recouvrement affinoïde rationnel (i.e. il existe $f_1, \cdots, f_n \in A$ sans zéro commun sur X tels que $\mathcal{V}$ soit constitué des parties $\{x \in X \mid |f_j(x)| \leqslant |f_i(x)|, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$). Il existe alors un recouvrement de Laurent $\mathcal{B} = \{B_l\}_l$ de X tel que pour tout l, le recouvrement affinoïde $B_l \cap \mathcal{V}$ de B_l se raffine en un recouvrement de Laurent $\mathcal{V}_l$ de B_l. Comme B_l est un S-espace (cf. prop. 2.2) et que $\mathcal{V}_l$ est constitué de parties affinoïde (ce sont des parties rationnelles de X contenues dans des ouverts affinoïdes) donc d'espaces de Stein, B_l est un espace de Stein (c'est la deuxième étape). Donc X est de Stein (toujours d'après la deuxième étape).

PROPOSITION 4.1. *Soient X, Y deux espaces de Stein quasi-compacts. Alors $X \times_K Y$ est un espace de Stein.*

PREUVE. Notons $Z = X \times_K Y$. Clairement, Z est holomorphiquement séparable. Calculons $H^q(Z, \mathcal{O}_Z)$.

(α) Supposons Y affinoïde. Soit $\{X_i\}_i$ un recouvrement admissible affinoïde fini de X. Alors le complexe de Čech alterné $\mathrm{C\dot{a}}(\{X_i\}_i, \mathcal{O}_X)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_X(X_i) \longrightarrow \bigoplus_{i<j} \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j) \longrightarrow \cdots$$

est exact. Donc $\mathrm{C\dot{a}}(\{X_i \times_K Y\}_i, \mathcal{O}_Z) = \mathrm{C\dot{a}}(\{X_i\}_i, \mathcal{O}_X) \hat{\otimes}_K \mathcal{O}_Y(Y)$ est aussi exact. Il suit que $H^q(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ pour tout $q > 0$. D'après le théorème 2, Z est un espace de Stein.

(β) Cas général. Soit $\{Y_j\}_j$ un recouvrement admissible affinoïde de Y. Soit $\mathcal{U}$ le recouvrement $\{X \times Y_j\}_{j \in J}$ de Z. On a le complexe de Čech exact $\mathrm{C\dot{a}}(\{Y_j\}_j, \mathcal{O}_Y)$, par $\hat{\otimes}_K \mathcal{O}_X(X)$, on obtient le complexe de Čech $\mathrm{C\dot{a}}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_Z)$ qui est exact (car $\mathcal{O}(X \times Y_j) = \mathcal{O}_Y(Y_j) \hat{\otimes}_K \mathcal{O}_X(X)$). Par conséquent $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}_Z) = 0$ pour tout $q > 0$. D'autre part, d'après (α) toute intersection finie d'un nombre d'un nombre fini de $X \times Y_j$, $j \in J$, est de Stein. Il résulte alors du lemme 2 et du théorème 2 que Z est un espace de Stein.

COROLLAIRE 4.1.1. *Soit X un espace de Stein quasi-compact. Alors toute partie rationnelle U de X est de Stein.*

PREUVE. En effet U est isomorphe à un fermé analytique de $X \times_K \boldsymbol{B}_K^n$ pour un certain $n \geqslant 1$.

COROLLAIRE 4.2.2. *Soient Ω un espace analytique séparé, U, V deux ouverts analytiques quasi-compacts de Ω qui sont de Stein. Alors $U \cap V$ est de Stein.*

PREUVE. En effet, $U \cap V$ est isomorphe à un fermé analytique de $U \times_K V$.

PROPOSITION 4.2. *Soient L un sous-corps fermé de K, X un L-espace analytique quasi-compact et séparé. Alors X est de Stein si et seulement si $X \hat{\otimes}_L K$ (cf.* [B,G,R] 9.3.6) *est de Stein.*

PREUVE. Supposons que $X \hat{\otimes}_L K$ est de Stein. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors on a de façon naturelle un faisceau cohérent $\mathcal{F} \hat{\otimes}_L K$ sur $X \hat{\otimes}_L K$. Comme $H^q(X \hat{\otimes}_L K, \mathcal{F} \hat{\otimes}_L K) = 0$ pour tout $q > 0$, on a $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q > 0$. Car $L \to K$ est topologiquement fidèlement plat. Donc X est un espace de Stein.

Supposons maintenant que X soit un espace de Stein. Il est clair que $H^q(X \hat{\otimes}_L K, \mathcal{O}_{X \hat{\otimes}_L K}) = 0$ pour tout $q > 0$. D'autre part en utilisant le corollaire 1 du théorème 1 et la proposition 2.2, on voit que $X \hat{\otimes}_L K$ est holomorphiquement séparable. Il résulte du théorème 2 que $X \hat{\otimes}_L K$ est un espace de Stein.

THÉORÈME 3. *Soient X, Y deux espaces de Stein quasi-compacts, Z un espace analytique séparé, $f\colon X\to Z$, $g\colon Y\to Z$ deux morphismes. Alors $W := X\times_Z Y$ est aussi un espace de Stein. De plus, notons $A=\mathcal{O}_X(X)$, $B=\mathcal{O}_Y(Y)$, $C=\mathcal{O}_Z(Z)$. Alors si Z est un espace de Stein quasi-compact, l'homomorphisme canonique $A\hat{\otimes}_C B\to\mathcal{O}_W(W)$ est un isomorphisme.*

PREUVE. Le morphisme canonique $\gamma\colon X\times_Z Y\to X\times_K Y$ induit un diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd}
X\times_Z Y \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & X\times_K Y \arrow[dd] \\
Z \arrow[d, "\Delta"] & \\
\Delta(Z) \arrow[r, hook] & V := Z\times_K Z
\end{tikzcd}$$

où $\Delta\colon Z\to Z\times_K Z$ est le morphisme diagonal. On a donc un diagramme commutatif

$$(*)\qquad \begin{tikzcd}
X\times_Z Y \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\gamma"'] & U := (X\times_K Y)\times_V \Delta(Z) \arrow[d, "p_1"] \\
& X\times_K Y
\end{tikzcd}$$

où p_1 est la première projection. Pour tout espace analytique T et tout morphisme $h\colon T\to U$, on a un diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[ddrr] & & \\
& X\times_K Y \arrow[u] & & \\
T \arrow[uur] \arrow[r] \arrow[ddr] & U \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & \Delta(Z) \arrow[r, "\sim"] & Z \\
& X\times_K Y \arrow[d] & & \\
& Y \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}$$

cela induit un morphisme $h'\colon T\to X\times_Z Y$. On vérifie que $\tau\circ h'=h$. Donc l'application canonique $\mathrm{Mor}(T, X\times_Z Y)\xrightarrow{\tau_*}\mathrm{Mor}(T, U)$ est bijective. Cela implique que $\tau\colon X\times_Z Y\to U$ est un isomorphisme. Il suit de $(*)$ que γ est une immersion fermée (p_1 est une immersion fermée car elle est induite par $\Delta(Z)\hookrightarrow V=Z\times_K Z$ et Z séparé). Il suit de la prop. 4.1. que $X\times_Z Y$ est un espace de stein.

Supposons maintenant que Z est un espace de Stein quasi-compact. Soient $s\colon A\hat{\otimes}_K B\to A\hat{\otimes}_C B$, $\rho\colon A\hat{\otimes}_C B\to\mathcal{O}_W(W)$ les homomorphismes canonques, W' le fermé analytique $(\mathrm{Ker}\, s)^\sim$ de $X\times_K Y$. Comme $(\mathrm{Ker}\, s)^\sim(X\times_K Y)=\mathrm{Ker}\, s$ et $H^1(X\times_K Y, (\mathrm{Ker}\, s)^\sim)=0$, on a la suite exacte

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}\, s\longrightarrow \mathcal{O}(X\times_K Y)\longrightarrow \mathcal{O}_{W'}(W')\longrightarrow 0\,.$$

Donc

$$\mathcal{O}_{W'}(W') \xrightarrow{\sim} A\hat{\otimes}_K B/\mathrm{Ker}\, s \xrightarrow{\sim} A\hat{\otimes}_C B\,.$$

Le deuxième isomorphisme est vrai car s est surjectif. Cela induit donc un diagramme commutatif de K-algèbres de Banach:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{W'}(W') & \longleftarrow & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \longleftarrow & C \end{array}$$

ce qui équivaut à la donnée d'un diagramme commutatif (prop. 3.2.a)

$$\begin{array}{ccc} W' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z\,. \end{array}$$

On en déduit un morphisme $W' \to W = X \times_Z Y$. Ce morphisme induit un homomorphisme $\mathcal{O}_W(W) \to \mathcal{O}_{W'}(W')$ qui est l'inverse de ρ. Donc ρ est un isomorphisme.

On peut remarquer que l'isomorphisme $A\hat{\otimes}_C B \to \mathcal{O}_W(W)$ est faux en général si on ne suppose pas Z de Stein. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre $Z = \boldsymbol{P}^1_K$, $X = Y$ un ouvert affinoïde quelconque de Z.

COROLLAIRE. *Soit $f\colon X \to Z$ un morphisme d'espaces de Stein quasi-compacts. Soit Y un ouvert analytique quasi-compact de Z qui est de Stein. Alors $f^{-1}(Y)$ est un espace de Stein quasi-compact et on a $\mathcal{O}_X(X)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_Z(Z)}\mathcal{O}_Z(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(f^{-1}(Y))$.*

PREUVE. En effet, on a $f^{-1}(Y) = X \times_Z Y$.

5. Exemple d'un espace de Stein quasi-compact régulier qui n'est pas affinoïde.

LEMME 1. *Soit k un corps commutatif. Alors il existe un polynôme $q(T) \in k[T] - k$ tel que $k[T^2 + T] \cap k[q(T)] = k$.*

PREUVE. Posons

$$q(T) = \begin{cases} T^2 & \text{si } \operatorname{car} k = 0 \\ T^3 + T & \text{si } \operatorname{car} k = 2 \\ T^p + T^2 + T & \text{si } \operatorname{car} k = p > 2\,. \end{cases}$$

Démontrons l'égalité demandée dans le cas $\operatorname{car} k = p > 2$. En posant $S = T + 1/2$, cela revient à démontrer que $k[S^2] \cap k[S^p + S^2] = k$. Soit $f(X)$ un polynôme non constant de degré minimum tel que $f(S^2) = g(S^p + S^2)$. En dérivant par rapport à S on obtient $f'(X) = g'(X) = \lambda \in k$, donc

$$f(X) = f_1(X)^p + \lambda X\,, \quad g(X) = g_1(X)^p + \lambda X\,.$$

On a alors $\lambda = 0$ et $f_1(S^2) = g_1(S^p + S^2)$, donc $f_1(X)$ est constant, donc $f(X)$ est constant.

LEMME 2. *Soient K un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique non triviale, $P(X) \in K^{\circ}[X]$ un polynôme unitaire, $\pi \in K^{\circ\circ} - \{0\}$, A l'algèbre affinoïde $K\langle T, U, V\rangle/(V(U - P(\pi^{-1}T)) - \pi)$. On note $d = \deg P$, t, u, v, les images de T, U, V dans A. Alors on a*

$$A^{\circ} = K^{\circ}\langle u, t\rangle \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus_{0 \leq i \leq d-1}} (\pi^{-1}t)^i v K^{\circ}\langle u, v\rangle \right).$$

Plus précisément, pour tout $a \in A^{\circ}$, il existe $f(U, T) \in K^{\circ}\langle U, T\rangle$, et pour tout $i \leq d-1$, $g_i(U, V) \in K^{\circ}\langle U, V\rangle$, uniques tels que

$$(**) \qquad a = f(u, t) + \sum_{0 \leq i \leq d-1} (\pi^{-1}t)^i v g_i(u, v)$$

et que

$$(***) \qquad \| a \|_{sp} = \operatorname{Max}\{\| f(U, T) \|, \| g_i(U, V) \| \; |0 \leq i \leq d-1\},$$

où $\| \cdot \|_{sp}$ est la norme spectrale et $\| \cdot \|$ la norme de Gauss.

PREUVE. L'existence et l'unicité des $f(U, T) \in K\langle U, T\rangle$ et des $g_i(U, V) \in K\langle U, V\rangle$ vérifiant (**) sont claires. Il reste à démontrer la propriété concernant les normes. On voit facilement que $(\pi^{-1}t)v$ est entier sur $K^{\circ}[u, v] \subset A^{\circ}$, $(\pi^{-1}t)^2 v$ est entier sur $K^{\circ}[u, v, (\pi^{-1}t)v]$ etc.... On a donc $(\pi^{-1}t)^i v \in A^{\circ}$ pour tout $i \geq 0$. Par conséquent si on note $|\alpha_a|$ (où $\alpha_a \in K$) le membre droit de l'égalité (***), on a $\| a \|_{sp} \leq |\alpha_a|$. Pour montrer l'égalité, on peut diviser par $|\alpha_a|$ et se ramener donc à $\| a \|_{sp} \leq 1$ et $|\alpha_a| = 1$, i.e. $\operatorname{Max}\{\| f(U, T) \|, \| g_i(U, V) \| \; |0 \leq i \leq d-1\} = 1$. Il faut montrer que $\| a \|_{sp} = 1$.

Supposons $\| a \|_{sp} < 1$. Soient $\alpha, \beta \in (K^{\mathrm{alg}})^{\circ}$ avec $|\alpha| = 1$, $\gamma = (\beta - P(\pi^{-1}\alpha))^{-1}\pi$. Alors (α, β, γ) correspond à un point x de $\operatorname{Spm} A$ et on a

$$a(x) = f(\beta, \alpha) + \sum_{0 \leq i \leq d-1} (\pi^{-1}\alpha)^i \gamma g_i(\beta, \gamma).$$

On a $|(\pi^{-1}\alpha)^i \gamma| = |\pi^{-i}\gamma| = |\pi^{d-i}| < 1$ pour tout $i \leq d-1$. Donc $|f(\beta, \alpha)| < 1$ car $\| g_i(U, V) \| \leq 1$. Il suit que $\| f(U, T) \| < 1$. Prenons maintenant $\alpha', \gamma \in (K^{\mathrm{alg}})^{\circ}$ avec $|\gamma| = 1$. Alors $(\pi\alpha', P(\alpha') + \pi\gamma^{-1}, \gamma)$ correspond à un point y de $\operatorname{Spm} A$ et on a

$$\left| \sum_{0 \leq i \leq d-1} \alpha'^i \gamma g_i(P(\alpha') + \pi\gamma^{-1}, \gamma) \right| = |a(y) - f(P(\alpha') + \pi\gamma^{-1}, \pi\alpha')| < 1 .$$

Donc l'image de $\sum_{0 \leq i \leq d-1} T^i g_i(P(T), V)$ dans $k[T, V]$ (où k est le corps résiduel de K) est nulle. Comme $d - 1 < \deg P(T)$, l'image de chaque $g_i(U, V)$ dans $k[U, V]$ est nulle, donc $\| g_i(U, V) \| < 1$ pour tout $i \leq d-1$. Ce qui est contraire à l'hypothèse $|\alpha_a| = 1$. Donc $\| a \|_{sp} = 1$.

THÉORÈME 4. *Soit K un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique non triviale. Alors il existe un espace de Stein quasi-compact X, ouvert analytique de $\mathbf{B}_K^2$, qui* *n'est pas affinoïde.*

PREUVE. (α) *Construction de X.* Soient k le corps résiduel de K, $P(T)=T^2+T$, $Q(T)\in K^\circ[T]$ unitaire tel que son image dans $k[T]$ soit le polynôme $q(T)$ défini comme dans le lemme 1, $\pi\in K^{\circ\circ}-\{0\}$. On pose

$$A=K\langle T, U, V\rangle/(UV-P(\pi^{-1}T)V-\pi),$$
$$B=K\langle T, W, Z\rangle/(WZ-Q(\pi^{-1}T)Z-\pi),$$

et $X_1=\operatorname{Spm}A$, $X_2=\operatorname{Spm}B$. On note t, u, v les images respectives de T, U, V dans A; t, w, z les images de T, W, Z dans B. On a $A\langle v^{-1}\rangle=K\langle\pi^{-1}t, v, v^{-1}\rangle$, $B\langle z^{-1}\rangle=K\langle\pi^{-1}t, z, z^{-1}\rangle$ où on note par $A\langle v^{-1}\rangle$ l'algèbre $A\langle Y\rangle/(Yv-1)$ qui est canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}_{X_1}(\{x\in X_1 \mid |v(x)|\geq 1\})$ et par v^{-1} l'image de Y dans le quotient. Même définition pour $B\langle z^{-1}\rangle$. On a donc un isomorphisme de $A\langle v^{-1}\rangle$ sur $B\langle z^{-1}\rangle$ qui envoie v sur z^{-1}. Cet isomorphisme permet de définir X par le recollement de X_1 et X_2 sur $X_1\supset\operatorname{Spm}A\langle v^{-1}\rangle\simeq\operatorname{Spm}B\langle z^{-1}\rangle\subset X_2$.

(β) *L'espace X est isomorphe à un ouvert analytique de $\boldsymbol{B}_K^2$.* Soit r le degré de $Q(T)$. Considérons les homomorphismes $\varphi\colon K\langle S_1, S_2\rangle\to A$, $\psi\colon K\langle S_1, S_2\rangle\to B$ définis par $\varphi(S_1)=t$, $\varphi(S_2)=\pi^{r+1}v$, $\psi(S_1)=t$, $\psi(S_2)=\pi^r\omega-\pi^rQ(\pi^{-1}t)=\pi^{r+1}z^{-1}$. Alors φ et ψ induisent des isomorphismes respectifs de X_1 et X_2 sur les parties rationnelles

$$\{(s_1, s_2)\in\boldsymbol{B}_K^2 \mid |\pi^{r+1}|\geq|s_2|\geq|\pi^{r+3}|, |P(\pi^{-1}s_1)+\pi^{r+2}s_2^{-1}|\leq 1\}$$

et

$$\{(s_1, s_2)\in\boldsymbol{B}_K^2 \mid |s_2|\geq|\pi^{r+1}|, |Q(\pi^{-1}s_1)+\pi^{-r}s_2|\leq 1\}$$

de $\boldsymbol{B}_K^2=\operatorname{Spm}K\langle S_1, S_2\rangle$. Ces isomorphismes sont compatibles avec l'isomorphisme $\operatorname{Spm}A\langle v^{-1}\rangle\simeq\operatorname{Spm}B\langle z^{-1}\rangle$, ils définissent donc un isomorphisme de X sur un ouvert analytique de $\mathbf{B}_K^2$.

(γ) *L'espace X est de Stein.* D'après (β), X est holomorphiquement séparable. D'autre part, X a un recouvrement admissible $\{X_1, X_2\}$ par deux ouverts affinoïdes, donc $H^q(X, \mathcal{O}_X)=0$ pour tout $q\geq 2$. En vertu du théorème 2, il suffit de vérifier que $H^1(X, \mathcal{O}_X)=0$.

Notons $C=A\langle v^{-1}\rangle=\mathcal{O}_X(X_1\cap X_2)$, soit d l'application $A\times B\to C$ définie par $d(a, b)=a|_{X_1\cap X_2}-b|_{X_1\cap X_2}$. On a $C^\circ=K^\circ\langle\pi^{-1}t, v, v^{-1}\rangle$. Dans la suite, pour simplifier, on notera encore par a l'image dans C d'un élément a de A ou de B. Pour tout $n\geq 0$, on a $(\pi^{-1}t)^nz\in B^\circ$, il suit que $v^{-1}K^\circ\langle\pi^{-1}t, v^{-1}\rangle\subset d(\{0\}\times B^\circ)$. D'autre part on a $(\pi^{-1}t)^2=-\pi^{-1}t+u-\pi v^{-1}$ dans C. Par récurrence sur n, on a pour tout $n\geq 0$, $(\pi^{-1}t)^{2n}=\pi^{-1}ta_{n,1}+a_{n,2}+\pi c_n'$ avec $a_{n,1}$, $a_{n,2}\in A^\circ$, $c_n'\in C^\circ$. Il suit que l'on a le même type de résultat pour $(\pi^{-1}t)^{2n+1}$. Donc pour tout $n\geq 0$, il existe $a_n\in A^\circ$, $c_n\in C^\circ$ tel que $(\pi^{-1}t)^n=\pi^{-1}a_n+\pi c_n$. Par conséquent pour tout $c\in C^\circ$ il existe $(a', b')\in A^\circ\times B^\circ$ tel que $d(\pi^{-1}a', b')-c\in\pi C^\circ$. Par approximations succesives, on en déduit qu'il existe $(a, b)\in A^\circ\times B^\circ$ tel que $d(\pi^{-1}a, b)=c$. Par conséquent $\pi\check{H}^1(\{X_1, X_2\}, \mathcal{O}_X^\circ)=0$ (rappelons que $\mathcal{O}_X(X_1)=A$, $\mathcal{O}_X(X_2)=B$ et $\mathcal{O}_X(X_1\cap X_2)=C$). En particulier, $H^1(X, \mathcal{O}_X)=$

$\check{H}^1(\{X_1, X_2\}, \mathcal{O}_X)=0$. Donc X est un espace de Stein.

(δ) *L'espace X n'est pas affinoïde.* Supposons X affinoïde. Soit $e \in \mathcal{O}_X(X)^\circ$. On décompose $e_1 = e|_{X_1}$, $e_2 = e|_{X_2}$ suivant (**) du lemme 2, donc

$$e_1 = f_1(u, t) + \sum_{0 \le i \le 1} (\pi^{-1} t)^i v g_{1,i}(u, v)$$

$$e_2 = f_2(w, t) + \sum_{0 \le j \le r-1} (\pi^{-1} t)^j z g_{2,j}(w, z)$$

où r est le degré de $Q(T)$. Dans $\bar{C} = k[\overline{(\pi^{-1} t)}, \bar{v}, \bar{v}^{-1}]$ on a $\bar{t}=0$, $\bar{u} = \bar{P}(\overline{(\pi^{-1} t)})$, $\bar{w} = \bar{Q}(\overline{(\pi^{-1} t)})$, $\bar{z} = \bar{v}^{-1}$, il suit que

$$\bar{f}_1(\bar{P}(\overline{(\pi^{-1} t)}), 0) + \sum_{0 \le i \le 1} \overline{(\pi^{-1} t)}^i \bar{v} \bar{g}_{1,i}(\bar{P}(\overline{(\pi^{-1} t)}), \bar{v})$$

$$= \bar{f}_2(\bar{Q}(\overline{(\pi^{-1} t)}), 0) + \sum_{0 \le j \le r-1} \overline{(\pi^{-1} t)}^j \bar{g}_{2,j}(\bar{Q}(\overline{(\pi^{-1} t)}), \bar{v}^{-1})$$

donc $\bar{g}_{1,i}=0$, $\bar{g}_{2,j}=0$ pour $i \le 1$ et $j \le r-1$. Comme $k[\bar{P}(s)] \cap k[\bar{Q}(s)] = k$ par hypothèse, $\bar{f}_2(\bar{w}, 0) \in k$. Donc $\bar{e}_2 \in k + \bar{t}k[\bar{w}, \bar{t}] \subset \bar{B}$. Inversement, soit $b = \lambda + tf(w, t) \in K^\circ + tK^\circ\langle w, t\rangle \subset B^\circ$. On a $d(0, \pi^{-1}(\lambda - b)) \in C^\circ$ car $\pi^{-1} t \in C^\circ$. D'après ce qu'on a vu précédemment, il existe $(a, b') \in A^\circ \times B^\circ$ tel que $d(\pi^{-1} a, b') = d(0, \pi^{-1}(\lambda - b))$, donc $d(a + \lambda, b + \pi b') = 0$. Par conséquent il existe $e \in \mathcal{O}_X(X)^\circ$ tel que $e|_{X_2} = b + \pi b'$ donc $\overline{e|_{X_2}} = \bar{b}$. Cela montre quel l'image de $\overline{\mathcal{O}_X(X)}$ dans $\bar{B}$ est égale à $k + \bar{t}k[\bar{w}, \bar{t}]$. Or cet anneau n'est pas noethérien. Donc $\overline{\mathcal{O}_X(X)}$ n'est pas noethérien. Ce qui implique que X n'est pas affinoïde.

COROLLAIRE. *Il existe un ouvert analytique quasi-compact X de $\boldsymbol{B}_K^2$ tel que $\mathcal{O}_{\boldsymbol{B}_K^2}(X)$ ne soit pas une algèbre affinoïde.*

PREUVE. Il suffit de considérer l'espace X construit dans le théorème ci-dessus. D'après le corollaire 3.2.1, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{B}_K^2}(X)$ n'est pas une algèbre affinoïde.

REMARQUE. D'après un théorème de Zariski ([Z, p. 274], voir aussi [N, p. 52]), pour toute surface algébrique géométriquement normale X sur un corps K, $\mathcal{O}_X(X)$ est une algèbre de type fini sur K. Le corollaire ci-dessus montre que l'analogue de ce théorème est faux en géométrie rigide.

BIBLIOGRAPHIE

[B,G,R] S. BOSCH, U. GÜNTZER ET R. REMMERT, Non-archimedian analysis, Grundl. der Math. 261, Springer Verlag. 1984.

[F] J. FRESNEL, Cours de géométrie analytique rigide, polycopié, Université de Bordeaux I, 1984.

[F,P] J. FRESNEL ET M. VAN DER PUT, Géométrie analytique rigide et applications, Progress in Math. 18, Birkhaüser, 1981.

[G,G] L. GERRITZEN ET H. GRAUERT, Die Azyklizität der affinoiden Uberdeckungen, Global analysis, Papers in Honor of K. Kodaira, 159–184. University of Tokyo Press and Princeton University Press 1969.

[H] A. Hanning, Zum satz von Siu in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, J. Reine Ang. Math. 334 (1982) 182–202.

[K] R. Kiehl, Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inv. Math. 2 (1967), 256–273.

[L] Q. Liu, Un contre-exemple au ⟪critère cohomologique d'affinoïdicité⟫, C.R. Acad. Sci. Paris 307, Série I, (1988) 83–86.

[Lüt] W. Lütkebohmert, Steinsche Räume in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, 2. serie, 6 (1973).

[N] M. Nagata, Lectures on the fourteenth problem of Hilbert, Tata Institute of Fund. Research, Bombay, 1965.

[R] M. Raynaud, Lettre à J. Fresnel, Janvier 1987.

[S1] J.-P. Serre, Applications de la théorie générale à divers problèmes globaux, Séminaire Cartan 1951–1952, exposé n° 20.

[S2] J.-P. Serre, Sur la cohomologie des variétés algébriques, J. Math. Pures et Appl. 36 (1957), 1–16.

[S3] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math. 61 (1955), 197–278.

[Z] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Collected Papers, Vol. II, ed. M. Artin and D. Mumford, M.I.T. Press, 1973.

CNRS, L. A. n° 226
UER de Mathématiques et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex
France