C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, p. 83-86, 1988

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Un contre-exemple au « critère cohomologique d'affinoïdicité »

Qing LIU

Résumé — On construit un espace analytique rigide X quasi-compact et séparé qui n'est pas affinoïde et qui vérifie la propriété : pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$ et tout $i \geqq 1$, $H^i(X, \mathcal{F})=0$.

A counterexample to the "cohomological criterion for affinoid spaces"

Abstract — *We construct a rigid analytic space* X *which is quasi-compact, separated and non-affinoid such that* $H^i(X, \mathcal{F})=0$ *for all coherent* $\mathcal{O}_X$*-Modules* $\mathcal{F}$ *and all* $i \geqq 1$.

Le théorème suivant est bien connu ([6], [1], p. 378 et 330) :

THÉORÈME (Tate, Kiehl). — *Soient* X *un espace affinoïde,* $\mathcal{O}_X$ *son faisceau structural,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Alors pour tout* $i \geqq 1$, $H^i(X, \mathcal{F})=0$.

On sait que cette condition de nullité des groupes de cohomologie caractérise les schémas noethériens affines (critère de Serre, [5], § 5.2, [8]). En géométrie analytique complexe elle caractérise les espaces de Stein [9]. On peut se demander si en géométrie analytique rigide, cette condition suffit pour qu'un espace analytique rigide quasi-compact (i. e. qui a un recouvrement admissible affinoïde fini) soit affinoïde. Le but de cet article est de montrer par un contre-exemple que ce n'est pas vrai (corollaire 1). Les questions suivantes sont liées à ce problème :

(*a*) *Soit* $f: Y \to X$ *un morphisme fini surjectif d'espaces analytiques rigides quasi-compacts avec* Y *affinoïde. Alors* X *est-il affinoïde ?*

(*b*) *Soient* D_0 *une algèbre affinoïde sur un corps* K *complet pour une valeur absolue ultramétrique,* D *une sous-algèbre de* D_0 *telle que* D_0 *soit finie sur* D. *Alors* D *est-elle une algèbre affinoïde sur* K ?

Ce sont les réciproques de théorèmes connus ([1], p. 383). On verra que les réponses sont négatives (proposition 1, corollaire 2), ce qui est différent de la situation de la géométrie algébrique car on a :

(A) (théorème de Chevalley, [5], § 6.7). *Soit* $f: Y \to X$ *un morphisme fini surjectif de schémas noethériens avec* Y *affine. Alors* X *est affine* (c'est vrai aussi pour les schémas de type fini sur un corps).

(B) *Soient* D_0 *une algèbre de type fini sur un corps* K, D *une sous-algèbre de* D_0 *telle que* D_0 *soit finie sur* D. *Alors* D *est une algèbre de type fini sur* K.

En fait si l'on remplace dans (B) « algèbre de type fini » par « anneau noethérien », la conclusion reste vraie (théorème d'Eakin, [7], p. 263).

Fixons les notations. Soit K un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique. On note K^0 son anneau de valuation, K^{00} l'idéal de valuation. Si A est une algèbre affinoïde, on note $\|.\|_{sp}$ la semi-norme spectrale sur A et $A^0=\{a \in A \mid \|a\|_{sp} \leqq 1\}$. Enfin, on désigne par $K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ l'ensemble des séries formelles à n variables à coefficients $a_\nu (\nu \in \mathbf{N}^n)$ dans K tels que $\lim_{|\nu| \to \infty} a_\nu = 0$.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

PROPOSITION 1. — *Pour tout corps* K *complet pour une valeur absolue ultramétrique, il existe un* K*-espace analytique rigide* X *quasi-compact, réduit et séparé qui n'est pas affinoïde mais dont la normalisation est affinoïde.*

Démonstration. — (1) *Construction de* X. — Soit $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$. On pose

$$A = K\langle T, U, V\rangle / V(U - P(\lambda T)), \quad B = K\langle T, W, (W - Q(\lambda T))^{-1}\rangle,$$

où $P(S) = S(S+1)^2 \in K^0[S]$, $Q(S) \in K^0[S]$ est défini par $Q(S) = S^2$ si car $k = 0$ (k est le corps résiduel de K) et $Q(S) = S^p - S$ si car $k = p$. Ces deux polynômes sont choisis de telle façon que leurs images canoniques $\bar{P}$, $\bar{Q}$ dans $k[S]$ vérifient $k[\bar{P}] \cap k[\bar{Q}] = k$. On note $Y = \mathrm{Spm}\, A$, $Z = \mathrm{Spm}\, B$ et t, u, v les images respectives de T, U, V dans A. Soient

$$R = \{ y \in Y \mid |v(y)| \geqq 1 \}, \qquad R' = \{ z \in Z \mid |(W - Q(\lambda T))^{-1}(z)| \geqq 1 \}.$$

Ce sont respectivement des parties rationnelles de Y et Z. On a $\mathcal{O}_Y(R) = K\langle v, v^{-1}, \lambda t\rangle$, $\mathcal{O}_Z(R') = K\langle W, \lambda T, (W - Q(\lambda T))^{-1}\rangle$. L'homomorphisme $\varphi : \mathcal{O}_Y(R) \to \mathcal{O}_Z(R')$ défini par $\varphi(\lambda t) = \lambda T$, $\varphi(v) = W - Q(\lambda T)$ est clairement un isomorphisme. On recolle Y et Z le long de $\mathrm{Spm}\, \varphi : R' \xrightarrow{\sim} R$. On note X l'espace analytique rigide ainsi obtenu.

(2) *Structure de* X. — Clairement X est réduit, quasi-compact. On montre aisément qu'il est séparé. Soient $D = \mathcal{O}_X(X)$, $d \in D$ l'élément tel que $d|_Y = v$, $d|_Z = W - Q(\lambda T)$, $e \in D$ l'élément tel que $e|_Y = u - P(\lambda t)$, $e|_Z = 0$ (on rappelle que $Y = \mathrm{Spm}\, A$, $Z = \mathrm{Spm}\, B$). Soit F_1 le fermé analytique $V(d\mathcal{O}_X)$ de X associé au faisceau cohérent d'idéaux $d\mathcal{O}_X$. Il est donc muni du faisceau structural $\mathcal{O}_X/d\mathcal{O}_X$. Comme $d|_Z$ est inversible, on a $F_1 \cap Z = \varnothing$, donc $F_1 = \mathrm{Spm}(A/vA)$. Il suit que F_1 est affinoïde et $\mathcal{O}_{F_1}(F_1) \xrightarrow{\sim} K\langle T, U\rangle$. Soit F_2 le fermé analytique $V(e\mathcal{O}_X)$ muni du faisceau structural $\mathcal{O}_X/e\mathcal{O}_X$. On a $R \subset F_2$ et F_2 est obtenu en recollant $\mathrm{Spm}(A/(u - P(\lambda t))A)$ et Z par $\mathrm{Spm}\, \varphi : R' \xrightarrow{\sim} R$. Les isomorphismes

$$\mathrm{Id}_B : \quad K\langle T, W, (W - Q(\lambda T))^{-1}\rangle \xrightarrow{\sim} B$$

et

$$\psi : \quad K\langle \lambda T, W\rangle \xrightarrow{\sim} A/(u - P(\lambda t))A = K\langle \lambda t, v\rangle,$$

où ψ est défini par $\psi(\lambda T) = \lambda t$ et $\psi(W) = v + Q(\lambda t)$, induisent une immersion ouverte j de F_2 dans $\mathbf{B}_K^2 = \mathrm{Spm}\, K\langle T, W\rangle$ dont l'image est

$$\mathrm{Im}\, j = \{ z \in \mathbf{B}_K^2 \mid |\lambda T(z)| \leqq 1 \} \cup \{ z \in \mathbf{B}_K^2 \mid |(W - Q(\lambda T))(z)| \geqq 1 \} = \mathbf{B}_K^2.$$

Il suit que F_2 est affinoïde et que $\mathcal{O}_{F_2}(F_2) \xrightarrow{\sim} K\langle T, W\rangle$. Comme $d.e = 0$ dans D, les composantes irréductibles de X sont F_1 et F_2. Par conséquent, la normalisation de X est affinoïde ([3], § 2.1.2).

(3) *L'espace* X *n'est pas affinoïde.* — Soit F_3 le fermé analytique $V(d\mathcal{O}_X \oplus e\mathcal{O}_X)$ de X muni du faisceau structural $\mathcal{O}_X/(d\mathcal{O}_X \oplus e\mathcal{O}_X)$. On a $F_3 = F_1 \cap F_2$ et $\mathcal{O}_{F_3}(F_3) \xrightarrow{\sim} K\langle \lambda T\rangle$. Les homomorphismes canoniques $f_1 : \mathcal{O}_{F_1}(F_1) \to \mathcal{O}_{F_3}(F_3)$, $f_2 : \mathcal{O}_{F_2}(F_2) \to \mathcal{O}_{F_3}(F_3)$ sont définis par $f_1(T) = \lambda^{-1}(\lambda T)$, $f_1(U) = P(\lambda T)$, $f_2(T) = \lambda^{-1}(\lambda T)$ et $f_2(W) = Q(\lambda T)$. Soit $f : D = \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{F_3}(F_3)$ l'homomorphisme canonique. Supposons X affinoïde, alors f est surjectif, donc $\mathcal{O}_{F_3}(F_3)^0$ est entier sur $f(D^0)$ ([4], p. 77). Comme $k[\bar{P}] \cap k[\bar{Q}] = k$ (où k est le corps résiduel de K), on a $K^0\langle T, P(\lambda T)\rangle \cap K^0\langle T, Q(\lambda T)\rangle \subset K^0 + K^{00}\langle \lambda T\rangle$. Or

$$f(D^0) \subset f_1(\mathcal{O}_{F_1}(F_1)^0) \cap f_2(\mathcal{O}_{F_2}(F_2)^0) = K^0\langle T, P(\lambda T)\rangle \cap K^0\langle T, Q(\lambda T)\rangle,$$

donc $\mathcal{O}_{F_3}(F_3)^0 = K^0\langle \lambda T\rangle$ n'est pas entier sur $f(D^0)$. Par conséquent X n'est pas affinoïde.

DÉFINITION. — Soit X un espace analytique rigide quasi-compact. On dit que X est un *espace de Stein* si pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$ et tout $i \geqq 1$, on a $H^i(X, \mathcal{F})=0$. Ainsi tout espace affinoïde est de Stein.

LEMME 1. — *Soit* X *un espace analytique quasi-compact, soit* X_{red} *l'espace analytique réduit associé. Alors* X *est de Stein si et seulement si* X_{red} *est de Stein.*

LEMME 2. — *Soient* X *un espace analytique rigide,* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *deux* $\mathcal{O}_X$-*Modules cohérents. Alors le faisceau* $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *sur* X *défini par* $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ *est un* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent.*

Démonstration. — Utiliser Bourbaki ([2], p. 111).

PROPOSITION 2. — *Soit* $f: Y \to X$ *un morphisme fini surjectif d'espaces analytiques rigides quasi-compacts avec* Y *de Stein. Alors* X *est aussi un espace de Stein. De plus* $\mathcal{O}_Y(Y)$ *est fini sur* $\mathcal{O}_X(X)$.

Démonstration. — D'après le lemme 1, on peut supposer X et Y réduits. Comme tout fermé analytique de Y est de Stein (quel que soit son faisceau structural), par récurrence noethérienne on peut supposer que tout fermé analytique de X qui est différent de X soit de Stein (quel que soit son faisceau structural). Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$ de support $F \neq X$, on munit F du faisceau structural $\mathcal{O}_X/(\mathcal{A}nn\,\mathcal{F})$. Alors $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_F$-Module cohérent, Il suit de l'hypothèse ci-dessus que $H^i(X, \mathcal{F})=H^i(F, \mathcal{F})=0$ pour tout $i \geqq 1$.

Montrons qu'il existe $n \geqq 1$ et un homomorphisme $\alpha : \mathcal{O}_X^n \to f_* \mathcal{O}_Y$ qui soit un isomorphisme en un certain point $p \in X$. Notons $\mathcal{G}=f_* \mathcal{O}_Y$, c'est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent et X est réduit, on en déduit qu'il existe $p \in X$ tel que $\mathcal{G}_p$ soit libre de rang n sur $\mathcal{O}_{X,\,p}$. Soit $\mathcal{M}$ le $\mathcal{O}_X$-Module cohérent tel que $\mathcal{M}_x=\mathcal{O}_{X,\,x}$ si $x \neq p$ et $\mathcal{M}_p=\mathfrak{m}_p$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,\,p}$. Soit $\mathcal{M}'$ le $\mathcal{O}_Y$-Idéal cohérent radiciel associé au fermé analytique $f^{-1}\{p\}$, alors $f_* \mathcal{M}'=\mathcal{M} f_* \mathcal{O}_Y=\mathcal{M}\mathcal{G}$. Donc $H^1(X, \mathcal{M}\mathcal{G})=H^1(Y, \mathcal{M}')=0$. Il résulte alors de la suite exacte $0 \to \mathcal{M}\mathcal{G} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{M}\mathcal{G} \to 0$, que l'homomorphisme canonique $\mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}_p/\mathfrak{m}_p \mathcal{G}_p$ est surjectif. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{G}(X)$ tels que leurs images dans $\mathcal{G}_p/\mathfrak{m}_p \mathcal{G}_p$ engendrent ce dernier en tant que $(\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p)$-espace vectoriel. Ces sections globales induisent un homomorphisme $\alpha : \mathcal{O}_X^n \to \mathcal{G}$. Par le lemme de Nakayama, α_p est un isomorphisme.

Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent. La suite exacte $\mathcal{O}_X^n \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \to \mathrm{Coker}\,\alpha \to 0$ donne la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}om(\mathrm{Coker}\,\alpha, \mathcal{L}) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{L})=\mathcal{L}^n.$$

D'où les suites exactes

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{H}om(\mathrm{Coker}\,\alpha, \mathcal{L}) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Coker}\,\beta \to 0.$$

$$(2) \qquad 0 \to \mathrm{Coker}\,\beta \to \mathcal{L}^n \to \mathrm{Coker}\,\gamma \to 0.$$

Le faisceau $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{L})$ a naturellement une structure de $\mathcal{G}$-Module cohérent $(\mathcal{G}=f_* \mathcal{O}_Y)$, il existe donc un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent $\mathcal{G}'$ tel que $f_* \mathcal{G}'=\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{L})$. Donc $H^i(X, \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{L}))=0$ pour tout $i \geqq 1$. Comme $p \notin \mathrm{Supp}(\mathrm{Coker}\,\alpha)$, $\mathcal{H}om(\mathrm{Coker}\,\alpha, \mathcal{L})$ est à support différent de X, donc ses groupes de cohomologie sont aussi nuls (à partir du rang 1). Il résulte de la suite exacte (1) que Coker β vérifie la même propriété. Comme $p \notin \mathrm{Supp}(\mathrm{Coker}\,\gamma)$, Coker γ vérifie aussi la même propriété. Il résulte donc de la suite exacte (2) que pour tout $i \geqq 1$, $H^i(X, \mathcal{L}^n)=0$, donc $H^i(X, \mathcal{L})=0$.

Comme X est un espace de Stein quasi-compact, on montre aisément que pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}(X)$ est un $\mathcal{O}_X(X)$-module de type fini. Par conséquent $\mathcal{O}_Y(Y)$ est fini sur $\mathcal{O}_X(X)$.

COROLLAIRE 1. — *Soit* K *un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique. Alors il existe un espace analytique rigide* X *quasi-compact, séparé, qui n'est pas affinoïde tel que, pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathcal{F}$ *et tout* $i \geqq 1$, *on ait* $H^i(X, \mathcal{F})=0$.

Démonstration. — Il suffit de prendre l'espace X de la proposition 1 et d'appliquer la proposition 2 à la normalisation $f: X' \to X$ de X.

COROLLAIRE 2. — *Soit* K *un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique. Alors il existe une* K*-algèbre affinoïde* D_0, *une sous-*K*-algèbre* D *de* D_0 *telle que* D_0 *soit finie sur* D *et que* D *ne soit pas affinoïde.*

Démonstration. — Soit X l'espace analytique construit dans la démonstration de la proposition 1. On garde aussi les autres notations. L'espace X étant de Stein (proposition 2), $D \to \mathcal{O}_{F_3}(F_3)$ est surjectif. Or on a vu que $D^0 \to \mathcal{O}_{F_3}(F_3)^0$ n'est pas entier, donc D n'est pas une K-algèbre affinoïde. Soit X' la normalisation de X. Alors $D_0 = \mathcal{O}_{X'}(X')$ est affinoïde, $D \subset D_0$ et D_0 est finie sur D d'après la proposition 2.

Remarque 1. — Les questions posées au début du texte trouvent toutes une réponse positive en dimension 1. Si X est un espace analytique rigide quasi-compact de Stein de dimension 1, alors X est affinoïde (utiliser [3], théorème 2 et corollaire, p. 176). Il suit de cela et d'après la proposition 2 que si dans la question (*a*) on suppose dim X = 1, alors X est affinoïde. Si dans (*b*) on suppose que dim D = 1, c'est alors un exercice facile de montrer que D est affinoïde.

Remarque 2. — On peut construire un espace analytique rigide de Stein quasi-compact, séparé et irréductible qui n'est pas affinoïde mais dont la normalisation est affinoïde.

Note reçue le 5 avril 1988, acceptée le 26 avril 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. BOSCH, U. GÜNTZER et R. REMMERT, *Non-archimedean analysis*, Grundl. der Math., 261, Springer Verlag, 1984.

[2] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chapitre 10, *Algèbre homologique*, *Éléments de Mathématique*, Masson, 1980.

[3] J. FRESNEL et M. MATIGNON, Sur les espaces analytiques quasi-compacts de dimension 1 sur un corps valué complet ultramétrique, *Ann. Mat. Pura Appl.*, (IV), CXLV, 1986, p. 159-210.

[4] J. FRESNEL et M. VAN DER PUT, Géométrie analytique rigide et applications, *Progress in Math.*, 18, Birkhäuser, 1981.

[5] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, Éléments de Géométrie Algébrique, II, Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 8, 1961.

[6] R. KIEHL, Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Inv. Math.*, 2, 1967, p. 256-273.

[7] H. MATSUMURA, *Commutative Algebra*, Benjamin, 1980.

[8] J.-P. SERRE, Sur la cohomologie des variétés algébriques, *J. Math. Pures et Appl.*, 36, 1957, p. 1-16.

[9] J.-P. SERRE, Applications de la théorie générale à divers problèmes globaux, *Séminaire Cartan* 1951-1952, exposé n° 20.

Institut des Hautes Études scientifiques,
35, *route de Chartres*, 91440 *Bures-sur-Yvette.*