

Table des matières

4	Structure mulidimensionnelles	3
4.1	Les chocs	3
4.1.1	Etude des chocs	4
4.2	Les relations de Prandtl-Meyer	5
4.3	Application : calcul d'une aile en losange	8

Chapitre 4

Structure mulidimensionnelles

On va commencer par regarder les chocs puis certaines solutions régulières, dans le cas 2D

4.1 Les chocs

Rappelons les relations d'Euler sous forme conservatives

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(u(E+p))}{\partial x} + \frac{\partial(v(E+p))}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Si la solution présente un choc localisé sur Σ , une variété régulière se déplaçant à la vitesse $\vec{\sigma} = \sigma \vec{n}$ où $\vec{n} = (n_x, n_y)$ est la normale à Σ en un point courant, les relations de Rankine Hugoniot s'écrivent

$$\begin{aligned}\sigma \Delta(\rho) &= \Delta(\rho u)n_x + \Delta(\rho v)n_y \\ \sigma \Delta(\rho u) &= \Delta(\rho u^2 + p)n_x + \Delta(\rho uv)n_y \\ \sigma \Delta(\rho v) &= \Delta(\rho uv)n_x + \Delta(\rho v^2 + p)n_y \\ \sigma \Delta(E) &= \Delta(u(E+p))n_x + \Delta(v(E+p))n_y\end{aligned}$$

En posant $u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}$ et $u_t = \vec{u} \cdot \vec{n}^\perp$, on a

$$\begin{aligned}\sigma \Delta(\rho) &= \Delta(\rho u_n) \\ \sigma \Delta(\rho u_n) &= \Delta(\rho u_n^2 + p) \\ \sigma \Delta(E) &= \Delta(u_n(E+p)) \\ \sigma \Delta(\rho u_n) &= \Delta(\rho u_n u_t)\end{aligned}$$

On introduit alors $\vec{v} = \vec{u} - \vec{\sigma}$ la vitesse relative, les relations de Rankine Hugoniot s'écrivent alors

$$\begin{aligned}\Delta(\rho v_n) &= 0 \\ \Delta(\rho v_n^2 + p) &= 0\end{aligned}$$

où $H = \frac{E+p}{\rho} = \frac{e+p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ est l'enthalpie totale. Comme $u^2 + v^2 = u_n^2 + u_t^2$, on peut les réécrire sous forme d'une relation dans la direction tangentielle à Σ ,

$$\Delta(\rho v_n v_t) = 0 \tag{4.1}$$

et de trois relations dans la direction normale,

$$\begin{aligned}\Delta(\rho v_n) &= 0 \\ \Delta(\rho v_n^2 + p) &= 0 \\ \Delta(\rho v_n H') &= 0\end{aligned}\tag{4.2}$$

où $H' = \frac{e+p}{\rho} + \frac{1}{2}u_n^2$.

Il y a deux cas possibles

1. Si $v_n^{1,2} = 0$, alors $\Delta p = 0$, par contre il n'y a aucune condition sur Δv_t . On appelle cela une *ligne de glissement* : la vitesse normale est continue ainsi que la pression, par contre la vitesse tangentielle peut être discontinue.
2. Si $v_n^{1,2} \neq 0$, on a alors

$$\begin{aligned}\Delta(\rho v_n) &= 0 \\ \Delta(\rho v_n^2 + p) &= 0 \\ \Delta H' &= 0\end{aligned}$$

, et $\Delta v_t = 0$. Il s'agit d'un choc : la densité, la pression et la vitesse normale vérifient les relations de Rankine Hugoniot 1D, et la vitesse tangentielle est continue.

4.1.1 Etude des chocs

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1}{\rho_2} &= \frac{v_{n1}}{v_{n2}} = \frac{2}{(\gamma+1)M_{n1}^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_{n1}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\end{aligned}$$

où $M_{n1} = \frac{v_{n1}}{c_1}$ En employant les notations de la figure 4.1,

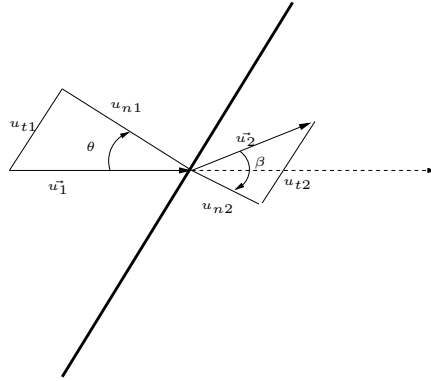


FIG. 4.1 – Notations.

$$u_{t1} = u_1 \sin \theta, u_{n1} = u_1 \cos \theta$$

et

$$u_{t2} = u_2 \sin \beta, u_{n2} = u_2 \cos \beta$$

Utilisant la continuité du débit et la continuité de la vitesse tangentielle,

$$\frac{\rho_1 u_{n1}}{u_{t1}} = \frac{\rho_2 u_{n2}}{u_{t2}}$$

soit

$$\cotan\beta = \cotan\theta \frac{\rho_2}{\rho_1} = \cotan\theta \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2 \cos^2 \beta} \right)$$

On représente sur la figure 4.2 la déflexion de la vitesse (i.e. l'angle entre la vitesse avant le choc et la vitesse après le choc). On constat est inférieur à 50° pour

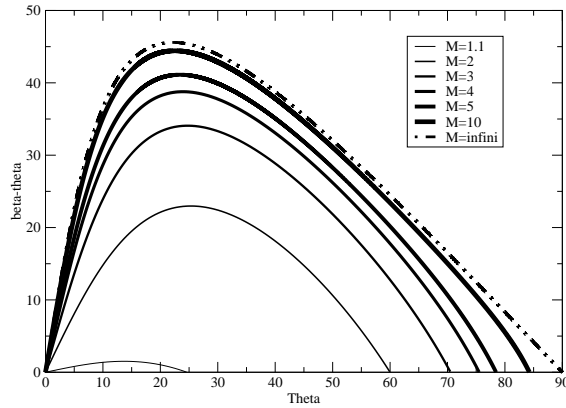


FIG. 4.2 – Représentation de la déflexion de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Mach.

$\gamma = 1.4$.

On peut aussi faire les remarques suivantes, toujours d'après les figure :

1. Pour une valeur de $\beta - \theta$ donnée, il y a deux valeurs de θ possibles. La plus petite valeur conduit à $M_2 < 1$ et la plus grande à $M_2 > 1$. Dans le premier cas, on a un choc fort, dans le second cas un choc faible. En pratique, seule la solution choc faible est observée sauf dans le cas où le choc est courbe.
2. Pour un nombre de mach donné, il existe un angle maximum de déviation qui peut être obtenu pour un choc. Si une plus grande déviation est imposée par la présence d'un obstacle, le choc ne peut pas être attaché au corps de l'obstacle. La forme du choc et la distance détachement sont des fonctions de la géométrie de l'obstacle. Ce cas est plus difficile à étudier analytiquement car il y a coexistence de zones supersoniques et de zones subsoniques. Deplus, puisque le choc est courbe, la force du choc (et donc la variation d'entropie au travers du choc) varie d'un point à l'autre. L'écoulement au travers du choc n'est plus homentropique ($\nabla s \neq 0$) et donc il y a variation du rotationnel d'evitesse. En fait, on ne peut qu'analyser ce type d'écoulement par les équations d'Euler complètes.

4.2 Les relations de Prandtl-Meyer

On considère un écoulement plan stationnaire autour d'un dièdre concave, voir figure 4.3 On cherche des solutions stationnaires de la forme $W = W(\frac{x}{y})$ qui soient homentropiques (entropie constante dans tous l'écoulement). Pour étudier ce problème, on va regarder la structure des équations d'Euler en coordonnées polaire, où

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{aligned}$$

et

$$\vec{u} = (u, v) = u_\theta \vec{e}_\theta + u_r \vec{e}_r,$$

L'équation de continuité s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (4.3a)$$

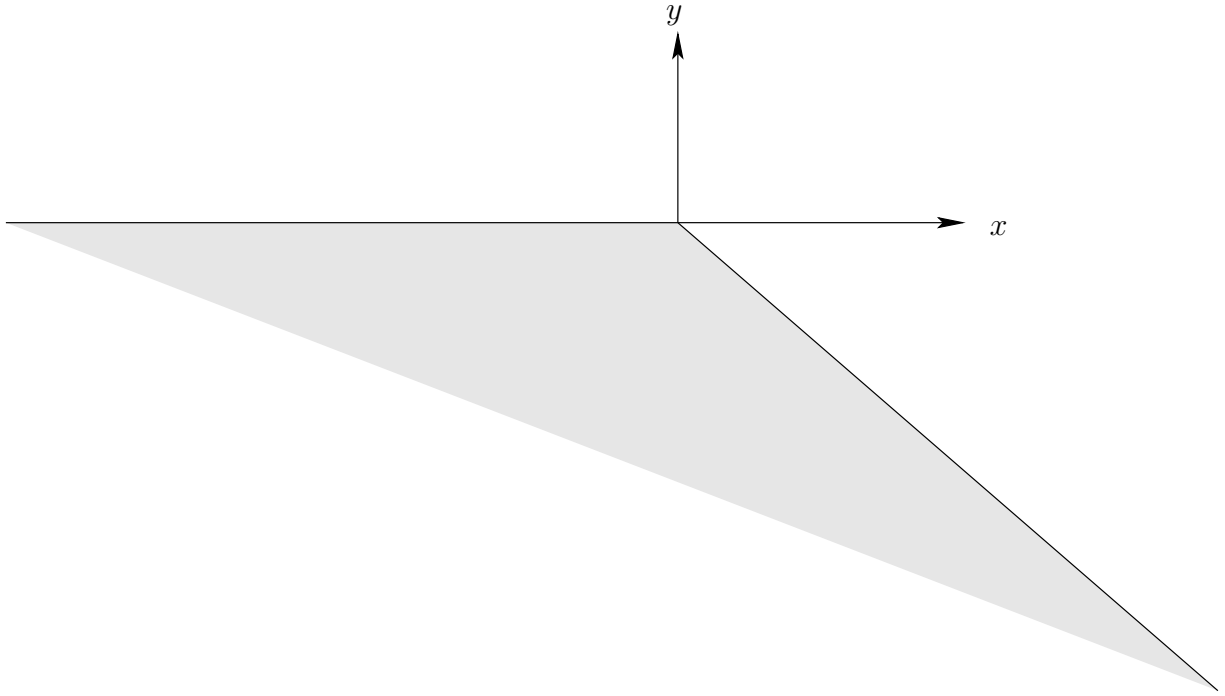


FIG. 4.3 –

et l'équation de quantité de mouvement

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (4.3b)$$

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (4.3c)$$

Il est inutile d'écrire l'équation sur l'énergie car l'écoulement est homentropique.

Puisque $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, x/y ne dépend que de θ , et donc les équations (4.3) s'écrivent

$$\frac{u_\theta}{r} \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{\rho}{r} \frac{du_\theta}{d\theta} + \rho \frac{u_r}{r} = 0 \quad (4.4a)$$

et

$$\frac{du_r}{d\theta} - u_\theta = 0 \quad (4.4b)$$

$$\frac{\rho}{r} \frac{du_\theta}{d\theta} + \frac{\rho}{r} u_r u_\theta + \frac{1}{r} \frac{dp}{d\theta} = 0 \quad (4.4c)$$

Puisque l'entropie est uniforme, $p = p(\rho)$ et $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$. L'équation de continuité (4.4a) devient

$$\frac{u_\theta^2}{rc^2} \frac{dp}{d\theta} + \frac{\rho}{r} \left(u_\theta \frac{du_\theta}{d\theta} + u_r u_\theta \right) = 0$$

et en faisant la différence avec $\rho \times (4.4c)$, on obtient

$$\frac{1}{r} \left(\frac{u_\theta^2}{c^2} - 1 \right) \frac{dp}{d\theta} = 0.$$

Comme on cherche des solutions générales, a priori $\frac{dp}{d\theta} \neq 0$ et donc

$$u_\theta^2 = c^2.$$

Comme on suppose un écoulement qui va de gauche à droite, on a $u_\theta < 0$ et donc

$$u_\theta = -a. \quad (4.5)$$

On introduit l'angle μ entre la direction \vec{e}_r et le vecteur vitesse, on voit (cf figure 4.4) que

$$\sin \mu = -\frac{u_\theta}{u} = \frac{1}{M}$$

La vitesse fait un angle $\nu = \mu - \phi$ par rapport à l'axe Ox , c'est à dire par rapport à l'angle initial.

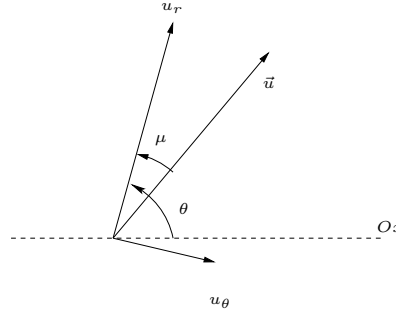


FIG. 4.4 -

On se place maintenant dans le cas du gaz parfait, $c^2 = \gamma p / \rho$. On a d'une part

$$d(c^2) = 2cdc = 2u_\theta du_\theta$$

et d'autre part comme l'écoulement est homentropique

$$\frac{dc^2}{c^2} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{1}{\rho\gamma c^2} dp$$

donc

$$\begin{aligned} d(c^2) &= \gamma \frac{p}{\rho} \frac{dp}{p} - \frac{dp}{\rho} \\ &= (\gamma - 1) \frac{dp}{\rho} \end{aligned}$$

On utilise cette relation dans (4.4a) donne (après simplification par $\frac{\rho}{r}$)

$$\begin{aligned} u_\theta \frac{du_\theta}{d\theta} + u_r u_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \\ &= u_\theta \left(\frac{2}{\gamma - 1} + 1 \right) \frac{du_\theta}{d\theta} + u_r u_\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

soit, puisque $u_\theta \neq 0$,

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{du_\theta}{d\theta} + u_r = 0. \quad (4.6)$$

Puis en employant (4.4b),

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{d^2 u_r}{d\theta} + u_r = 0. \quad (4.7)$$

La solution est de la forme

$$u_r(\theta) = C \sin \left(\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \theta + \theta_0 \right).$$

Pour ce problème, on a $u_r(\frac{\pi}{2}) = 0$ car l'écoulement est parallèle à la paroi en entrée et

$$\frac{du_r}{d\theta} \left(\frac{\pi}{2} \right) = -c_\infty = -\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} C,$$

donc

$$u_r(\theta) = c_\infty \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \sin \left(\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) \quad (4.8a)$$

$$u_\theta(\theta) = -c_\infty \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cos \left(\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) \quad (4.8b)$$

On peut aussi déterminer la pression :

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{a}{a_\infty} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} = \left(\frac{-u_\theta}{a_\infty} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} = \left\{ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cos \left(\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) \right\}^{2\gamma/(\gamma-1)}$$

On peut utiliser cette relation pour déterminer la déflexion maximale, c'est à dire quand $p = 0$: il faut que

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \frac{\pi}{2}$$

soit

$$\theta_{max} = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - 1 \right) \quad (4.9)$$

A titre d'exemple, $\theta_{max} \simeq 130^\circ$ pour $\gamma = 1.4$.

Avec quelques manipulations, on peut exprimer l'angle de déflexion en fonction du nombre de Mach

$$\nu(M) + \theta = \arcsin \left(\frac{1}{M} \right)$$

avec

$$\nu(M) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \arctan \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}.$$

4.3 Application : calcul d'une aile en losange

En utilisant les résultats de ce chapitre, on peut calculer "à la main" l'écoulement autour d'une aile dont le contour est polygonal, si le mach est assez grand en amont et si la forme de l'objet fait que tous les chocs potentiels sont attachés, voir la figure 4.6 pour un exemple de tel profil.

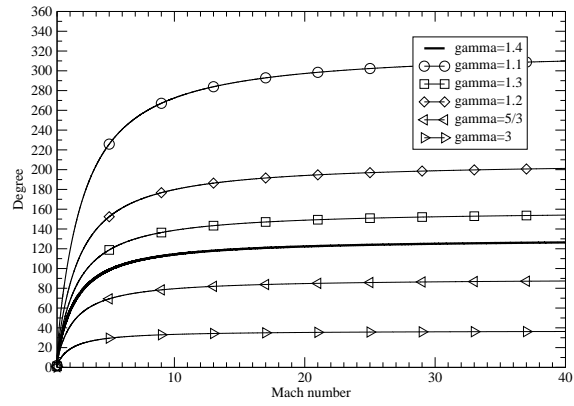


FIG. 4.5 – Représentation de $\nu(M)$ pour plusieurs valeurs de γ ,

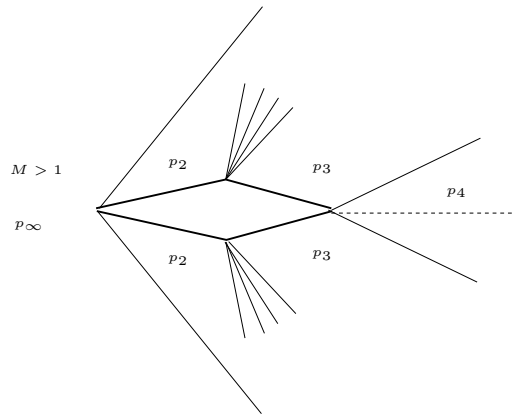


FIG. 4.6 – Représentation de $\nu(M)$ pour plusieurs valeurs de γ ,