

Devoir 1

Cours d'aérodynamique, MatMeca 2

Les documents sont interdits, durée 2h

Certaines des questions peuvent être traitées indépendamment.

Dans tout le problème, on considère un gaz parfait caloriquement parfait. Le rapport des chaleurs spécifiques est noté γ . On rappelle qu'on est subsonique en aval des chocs et supersonique en amont des chocs.

Exercice 1

On considère deux états $U_1 = (\rho_1, u_1, p_1)$ et $U_2 = (\rho_2, u_2, p_2)$ séparés par un choc se déplaçant à la vitesse σ . Si c désigne la vitesse du son ($c^2 = \gamma p / \rho$), on introduit les nombres de Mach relatifs

$$M_1 = \frac{u_1 - \sigma}{c_1}, \quad M_2 = \frac{u_2 - \sigma}{c_2},$$

et la vitesse relative $v = u - \sigma$.

1. Montrer que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

2. En déduire que

$$\left(M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right) \left(M_2^2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right) = \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma}\right)^2$$

puis que $M_1^2 \leq 1$ si et seulement si $M_2^2 \geq 1$.

Exercice 2

On considère un tube infini fermé à sa gauche par un piston. La position initiale du piston est l'origine de l'axe des x . Le tube est initialement rempli d'un gaz parfait au repos de densité ρ_0 et pression p_0 .

1. A $t = 0$, on anime le piston : il se déplace à la vitesse $V_1 > 0$. Un choc se forme devant le piston. Plus précisément, la solution est

$$\begin{aligned} \text{si } x \geq \sigma_{1/2}t & \quad (\rho, u, p) = (\rho_0, 0, p_0) \\ \text{si } \sigma_{1/2}t > x \geq V_1t & \quad (\rho, u, p) = (\rho_1, u_1, p_1) \end{aligned}$$

Déterminer u_1 , ρ_1 , p_1 et σ_1 . Vérifier que $V_1 < \sigma_{1/2}$.

2. A $t = t_1 > 0$, on modifie brusquement la vitesse du piston : la vitesse du piston est maintenant V_2 .

(a) Pour qu'un nouveau choc se crée devant le piston, faut-il que $V_2 > V_1$ ou $V_1 > V_2$? Justifier.

(b) On suppose que $V_2 > V_1$. On note $\sigma_{3/2}$ la vitesse du choc.

- i. Montrer que $\sigma_{3/2} > \sigma_{1/2}$,

ii. Pendant une durée qu'on ne cherchera pas à évaluer, la solution s'écrit

$$\begin{aligned} \text{si } x \geq \sigma_{1/2}t & \quad (\rho, u, p) = (\rho_0, 0, p_0) \\ \text{si } \sigma_{1/2}t > x \geq V_{1/2}t & \quad (\rho, u, p) = (\rho_1, u_1, p_1) \\ \text{si } \sigma_{3/2}t > x \geq \sigma_{1/2}t & \quad (\rho, u, p) = (\rho_2, u_2, p_2) \\ \text{si } V_2t > x \geq \sigma_{3/2}t & \quad (\rho, u, p) = (\rho_2, u_2, p_2) \end{aligned}$$

Déterminer $\sigma_{3/2}, \rho_2, u_2, p_2$

iii. Comparer $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ et $\frac{\rho_2}{\rho_0}$. Quelles sont les valeurs maximales de ces rapports ?

Cette technique (en un peu plus sophistiquée, permet d'obtenir des rapports de compression arbitrairement grand.

Solution

Exercice 1

1. Relations de Rankine Huoniot, avec des notations standards

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (1a)$$

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 \quad (1b)$$

et en employant la loi d'état, l'équation de conservation de l'enthalpie devient

$$c_1^2 + \frac{\gamma-1}{2} v_1^2 = c_2^2 + \frac{\gamma-1}{2} v_2^2 \quad (1c)$$

(1c) devient

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 &= \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{v_2^2}{c_1^2} \\ &= \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \frac{v_2^2}{v_1^2} \\ &= \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Dans la suite, on pose $x = \rho_1/\rho_2$. Il faut exprimer $\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2$ en fonction de x et M_1 . On a

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 = \frac{p_2 \rho_2}{p_1 \rho_1} = x \frac{p_2}{p_1},$$

puis à partir de (1b),

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} + 1 &= \frac{\rho_2 v_2^2}{p_1} + \frac{p_2}{p_1} \\ &= \gamma M_1^2 + 1 = \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} \frac{v_2}{v_1} + \frac{p_2}{p_1} \\ &= \gamma M_1^2 \frac{rho_1}{\rho_2} + \frac{p_2}{p_1} \\ &= x \gamma M_1^2 + \frac{p_2}{p_1} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{p_2}{p_1} = \gamma M_1^2 (1-x) + 1.$$

On obtient finalement

$$1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 = x \left(\gamma M_1^2 (1-x) + 1 \right) + \frac{\gamma-1}{2} x^2 M_1^2$$

soit

$$-\frac{\gamma+1}{2} M_1^2 x^2 + x(\gamma M_1^2 + 1) - \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) = 0$$

dont une racine évidente est $x = 1$ qui est rejetée, donc

$$x = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Puis comme

$$\frac{p_2}{p_1} = \gamma M_1^2 (1 - x) + 1,$$

et que

$$1 - x = \frac{2(M_1^2 - 1)}{(\gamma + 1)M_1^2},$$

on obtient

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

2. Relation de Meyer. Par symétrie

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_2^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$$

en multipliant et en simplifiant

$$\left(M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right) \left(M_2^2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right) = \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right)^2.$$

Si $M_1^2 > 1$,

$$\begin{aligned} M_2^2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} &= \frac{\left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right)^2}{M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \leq \frac{\left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right)^2}{1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \\ &= \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \end{aligned}$$

et donc

$$M_1^2 \leq \frac{\gamma - 1}{2\gamma} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = 1.$$

Exercice 2

1. On a forcément $u_1 = V_1$, $v_1 = u_0 - \sigma_{1/2} = -\sigma_{1/2}$ et $v_1 = V_1 - \sigma_{1/2}$ donc d'après les résultats précédent

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{V_1 - \sigma_{1/2}}{-\sigma_{1/2}} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{c_0^2}{\sigma_{1/2}^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$$

soit

$$(\gamma + 1)\sigma_{1/2}(\sigma_{1/2} - V_1) = 2c_0^2 + (\gamma - 1)\sigma_{1/2}^2$$

qui s'arrange en

$$-2\sigma_{1/2}^2 + V_1(\gamma + 1)\sigma_{1/2} + 2c_0^2 = 0.$$

On prend la racine positive,

$$\sigma_{1/2} = \frac{\gamma + 1}{2} V_1 + \frac{\sqrt{(\gamma + 1)^2 V_1^2 + 4c_0^2}}{2}.$$

On voit que $\sigma_{1/2} > V_1$ d'après la formule.

On aurait pu se rendre compte de cela en employant les relations de Rankine Hugoniot (relation sur le débit). On voit cela après.

2. (a) On est supersonique avant le choc et subsonique après : Le premier choc indique que $\frac{V_1 - \sigma_{1/2}}{c_1} < 1$

et le second choc montre que $\frac{V_1 - \sigma_{3/2}}{c_1} > 1$. En comparant, $\sigma_{3/2} > \sigma_{1/2}$.

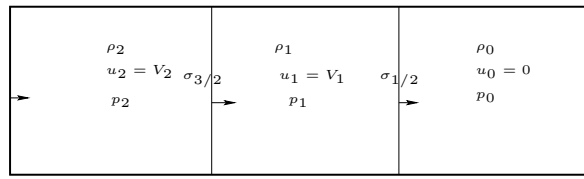


FIG. 1 –

- (b) On renvoie à la figure 1. On emploie les relations de l'exercice 1 avec $v_1 = V_1 - \sigma_{3/2}$ et $v_2 = V_2 - \sigma_{3/2}$ et

$$M_1 = \frac{V_1 - \sigma_{3/2}}{c_1}.$$

On a donc

$$\frac{V_2 - \sigma_{3/2}}{V_1 - \sigma_{3/2}} = \frac{2c_1^2}{(\gamma + 1)(V_1 - \sigma_{3/2})^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

On pose $x = V_1 - \sigma_{3/2}$ et donc

$$x(v_2 = V_1 + x) = 2c_1^2 + (\gamma - 1)x^2$$

d'où

$$-2x^2 - (\gamma + 1)(V_2 - V_1)x + 2c_1^2 = 0.$$

On prend la racine négative (débit et question précédente) encore

$$V_1 - \sigma_{3/2} = \frac{\gamma + 1}{2}(V_2 - V_1) - \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma + 1)^2(V_2 - V_1)^2 + 4c_1^2}$$

soit

$$\sigma_2 = V_1 - \frac{\gamma + 1}{2}(V_1 - V_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma + 1)^2(V_2 - V_1)^2 + 4c_1^2}.$$

- (c) D'après les relations de Rankine Hugoniot (en particulier celle sur le rapport de densité), comme ρ_2 est la densité en amont du choc (supersonique) et ρ_1 en aval du choc (subsonique), on a

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$$

Donc

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_0} > \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

La valeur maximale (mach infini) du rapport des masses volumique est

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

En procédant de la sorte on peut atteindre des rapports aussi grands qu'on veut, mais il faut adapter les instants où on lance le piston pour que les chocs ne se rencontrent pas.